LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN1
Datum: 2012-09-07
Institution: MAI

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN1 2012-09-07 08–11

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. För vilka reella x gäller olikheten $\dfrac{x+2}{x-2} \leq x - 4$? (3p)

2. (a) Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=3}^{27}(3k + 3^k)$. (1p)

   (b) Finn koefficienten före x^{67} i uttrycket $(x^2 + x^3)^{32}$. (1p)

   (c) Finn medelpunkt och radie för cirkeln $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 2 = 0$. (1p)

3. Faktorisera polynomet $p(z) = 3z^3 - 15z^2 + 24z - 18$ fullständigt i komplexa faktorer. (3p)

4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{16 - x^2} + 2 - x = 0$. (3p)

5. Finn alla reella x så att $\sqrt{|x-3| - 2 + x} + \sqrt{|x-1| + 2 - x^2} = x$. (3p)

Lösningsskisser för TATA68, 2012-09-07

1. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{x+2}{x-2} \leq x-4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2-(x-4)(x-2)}{x-2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+7x-6}{x-2} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-(x-6)(x-1)}{x-2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-6)(x-1)}{x-2} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		1		2		6	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x-6)(x-1)}{x-2}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $1 \leq x < 2$ eller $x \geq 6$.

Svar: $1 \leq x < 2$ eller $x \geq 6$.

2. (a) Summan består av en aritmetisk del och en geometrisk del (kontrollera!). Vi delar således upp summan i två delar och beräknar enligt standardformler:

$$\sum_{k=3}^{27}(3k+3^k) = \sum_{k=3}^{27} 3k + \sum_{k=3}^{27} 3^k = \frac{3\cdot 3 + 3\cdot 27}{2}(27-3+1) + 3^3\sum_{k=0}^{24} 3^k$$
$$= 1125 + 3^3\frac{3^{25}-1}{3-1} = 1125 + \frac{27}{2}(3^{25}-1).$$

(b) Binomialsatsen medför att

$$(x^2+x^3)^{32} = \sum_{k=0}^{32}\binom{32}{k}(x^2)^k(x^3)^{32-k} = \sum_{k=0}^{32}\binom{32}{k}x^{2k+3\cdot 32-3k} = \sum_{k=0}^{32}\binom{32}{k}x^{96-k}.$$

Termen x^{67} dyker alltså upp i summan precis när $96-k=67$, så $k=29$. Svaret blir då

$$\binom{32}{29} = \frac{32\cdot 31\cdot 30}{3\cdot 2} = 4960.$$

(c) Vi kvadratkompletterar x-termer och y-termer var och en för sig och ser att

$$2x^2+2y^2+4x-8y-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+2x-4y-1=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2-1+(y-2)^2-4-1=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2+(y-2)^2=6.$$

Alltså har cirkeln sin medelpunkt i $(-1,2)$ och radien blir $\sqrt{6}$.

Svar: (a) $1125+\frac{27}{2}(3^{25}-1)$ (b) 4960 (c) Medelpunkt: $(-1,2)$; radie: $\sqrt{6}$.

3. Vi börjar med att bryta ut 3 och får att $p(z)=3q(z)$, där $q(z)=z^3-5z^2+8z-6$. Vi gissar sedan en rot, och finner att $p(3)=q(3)=0$. Alltså måste $z-3$ vara en faktor i $q(z)$. Polynomdivision ger att $q(z)=(z-3)(z^2-2z+2)$. Det återstår sålunda att finna rötterna till z^2-2z+2. Vi löser ekvationen

$$0 = z^2-2z+2 = (z-1)^2-1+2 = (z-1)^2+1,$$

varvid vi ser att $z-1=\pm i$ är de enda möjligheterna. Alltså finner vi lösningarna $z=1\pm i$, och vi kan skriva $z^2-2z+2=(z-(1+i))(z-(1-i))$. Vi kan nu faktorisera $p(z)$ fullständigt enligt

$$p(z) = 3(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i)).$$

Svar: $p(z)=3(z-3)(z-(1+i))(z-(1-i))$

4. Vi sorterar så att kvadratroten står ensam på en sida:

$$\sqrt{16 - x^2} = x - 2.$$

För att en lösning ska kunna existera måste $16 - x^2 \geq 0$ och även $x - 2 \geq 0$ (varför?). Dessa villkor kan slås samman till $2 \leq x \leq 4$.

Låt oss anta att $2 \leq x \leq 4$. Det följer att

$$\begin{aligned} \sqrt{16 - x^2} = x - 2. \quad &\Rightarrow \quad 16 - x^2 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{7}. \end{aligned}$$

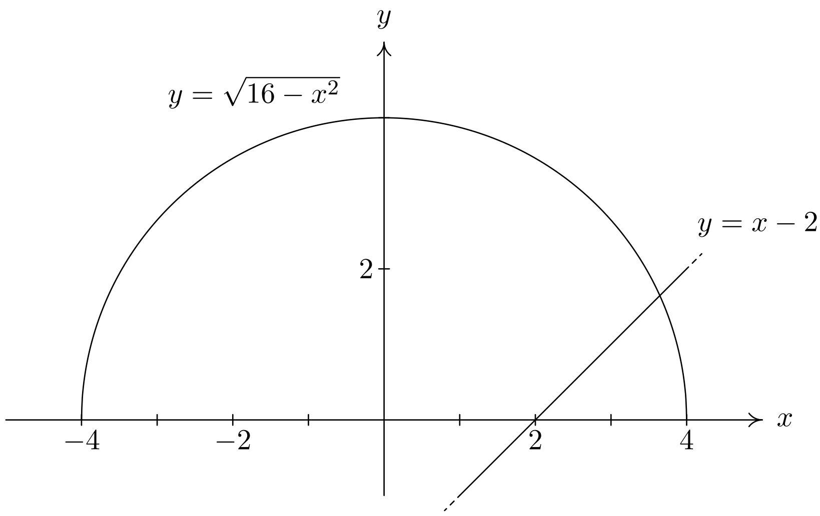
Endast $x = 1 + \sqrt{7}$ uppfyller kravet att $2 \leq x \leq 4$. Detta kan inses eftersom

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3.$$

Alternativt kan vi även testa direkt. Eftersom $x - 2 = 1 + \sqrt{7} - 2 = \sqrt{7} - 1 \geq 0$ kan vi kvadrera ekvationen med ekvivalens och ser att

$$(x-2)^2 = (\sqrt{7} - 1)^2 = 7 - 2\sqrt{7} + 1 = 8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{8 - 2\sqrt{7}})^2 = (\sqrt{16 - x^2})^2.$$

Om $x = 1 - \sqrt{7}$ så blir $x - 2 = 1 - \sqrt{7} - 2 < 0$, vilket leder till att $\sqrt{16 - x^2} < 0$ som är omöjligt. Detta är ingen lösning.



Figur 1: Kurvorna skär varandra endast i punkten $x = 1 + \sqrt{7}$.

Svar: $x = 1 + \sqrt{7}$ är den enda lösningen.

5. Enklast är att direkt dela upp i olika fall för att få bort beloppstecknen. Alternativet blir att ordentligt redan ut kraven på kvadratrötter i flera steg, vilket blir ganska bökigt. Således behandlar vi direkt tre fall istället.

- Låt $x \leq 1$. Då är $|x - 1| = 1 - x$ och $|x - 3| = 3 - x$, och ekvationen kan skrivas

$$\sqrt{3 - x - 2 + x} + \sqrt{1 - x + 2 - x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3 - x - x^2} = x - 1.$$

  För att lösning skall existera måste högerledet $x - 1 \geq 0$ (varför?). Detta medför att $x \geq 1$, men då vi redan kräver att $x \leq 1$ är $x = 1$ den enda möjligheten. Vi testar $x = 1$ och finner att detta ej är en lösning.

- Låt $1 \leq x \leq 3$. Ekvationen reduceras till

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x-2+x}+\sqrt{x-1+2-x^2}=x \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x-x^2}=x-1 \\
&\Rightarrow \quad 1+x-x^2=x^2-2x+1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2-3x=0 \\
&\Leftrightarrow \quad x=0 \text{ eller} x=3/2.
\end{aligned}$$

  Endast $x = 3/2$ uppfyller $1 \leq x \leq 3$, och $x = 3/2$ löser ursprungsekvationen (måste testas!).

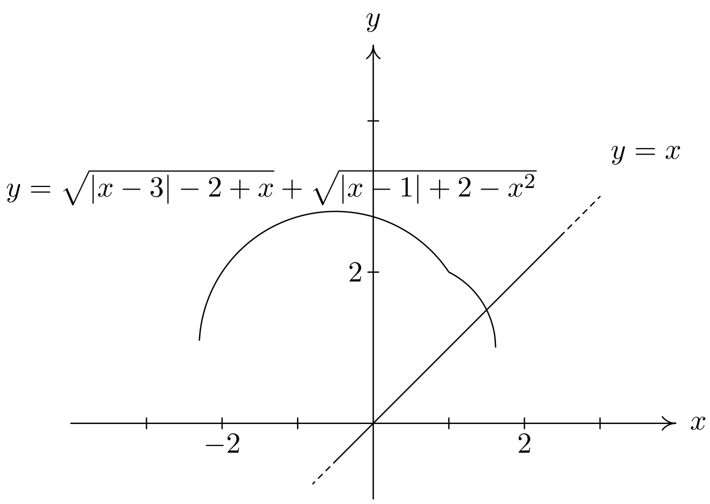
- Låt $x \geq 3$. Vi erhåller

$$\sqrt{x-3-2+x}+\sqrt{x-1+2-x^2}=x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1-x^2}=x.$$

  Denna ekvation blir (mycket) svår att försöka lösa med samma teknik som ovan, men desto bättre så visar det sig att inga lösningar kan existera! Vi inser detta genom att studera villkoren för att kvadratrötterna skall existera. Dels måste $x \geq 5/2$ och dels måste

$$x+1-x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

  Det sista kan ses genom faktorisering och teckentabell. Båda dessa villkor har ett tomt snitt eftersom $x \leq (1+\sqrt{5})/2 < (1+\sqrt{9})/2 = 2$, och $x \geq 5/2$.



Figur 2: Kurvorna skär varandra i punkten $x = 3/2$.

Svar: $x = 3/2$ enda lösningen.