LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN1
Datum: 2013-09-13
Institution: MAI

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN1 2013-09-13 08–11

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. För vilka reella x gäller olikheten $\dfrac{3x}{x+3} \leq \dfrac{2x}{x+1}$? (3p)

2. (a) Definiera $|x|$ för alla reella tal x. (1p)

   (b) Finn alla reella x så att $|x+2| + |x+3| + x - 5 = 0$. (2p)

3. (a) Låt $w = 3 - 2i$. Skriv $\dfrac{w\overline{w}}{w^2}$ på formen $a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. (1p)

   (b) Hitta alla lösningar till $z^2 + (2i+1)z = 1 - i$. (2p)

4. Vid *Camp Crystal Lake* härjar en våldsverkare iklädd en hockeymask, låt oss kalla honom Jason.

   (a) Jason planerar att mörda tre ungdomar en natt och har nio tillhyggen att välja på. Om vi bortser från ordningen, hur många unika mordserier kan Jason åstadkomma för dessa tre ungdomar om han använder precis ett tillhygge på varje individ (utan upprepning)? (1p)

   (b) Låt origo vara mittpunkten i Camp Crystal Lake. Vad är den kortaste sträckan mellan mittpunkten på cirkeln $x^2+y^2-4y = 0$ och mittpunkten på cirkeln $x^2+y^2-16x+2y = -64$ (enhet: km)? (2p)

5. Förenkla följande uttryck så långt det går: $\displaystyle\sum_{m=2}^{511}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k$, där x är ett reellt tal. (3p)

Lösningsskisser för TATA68, 2013-09-13

1. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{3x}{x+3} \leq \frac{2x}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x(x+1)-2x(x+3)}{(x+1)(x+3)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x-3)}{(x+1)(x+3)} \leq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		-3		-1		0		3	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x-3)}{(x+1)(x+3)}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-positivt precis då $-3 < x < -1$ eller $0 \leq x \leq 3$.

Svar: $-3 < x < -1$ eller $0 \leq x \leq 3$.

2. (a) Beloppet definieras (för reella tal) enligt $|x| = x$ då $x \geq 0$ och $|x| = -x$ då $x < 0$.

   (b) Vi delar upp i tre olika fall för de möjliga teckenkombinationerna: $x \leq -3$, $-3 < x \leq -2$ och $x > -2$. Alltså:

   Fall 1: $x \leq -3$. Då är

$$|x+2| + |x+3| + x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x-2-x-3+x-5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -10,$$

   vilket ligger i rätt intervall. Alltså lösning.

   Fall 2: $-3 < x \leq -2$. Då är

$$|x+2| + |x+3| + x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x-2+x+3+x-5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4,$$

   vilket *inte* ligger i rätt intervall. Ingen lösning.

   Fall 1: $x > -2$. Då är

$$|x+2| + |x+3| + x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2+x+3+x-5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

   vilket ligger i rätt intervall. Alltså lösning.

Svar: (a) Se ovan. (b) $x = -10$ och $x = 0$.

3. (a) Vi vet att $w\overline{w} = |w|^2 = 9 + 4 = 13$. Vidare är $w^2 = 5 - 12i$, så

$$\frac{w\overline{w}}{w^2} = \frac{13}{5-12i} = \frac{13(5+12i)}{169} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i.$$

   (b) Vi kvadratkompletterar:

$$z^2+(2i+1)z+i-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+i+1/2)^2-(i+1/2)^2+i-1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z+i+1/2)^2-1/4 = 0.$$

   Här ser vi att $z + i + 1/2 = \pm 1/2$, så lösningarna ges av $z = -i$ och $z = -1 - i$.

Svar: (a) $\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$. (b) $z = -i$ och $z = -1 - i$.

4. (a) Vi väljer alltså ut 3 objekt från 9 utan ordning. Detta kan göras på $\binom{9}{3}$ olika sätt, och

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$$

(b) Vi undersöker cirklarna:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y-2)^2 = 4$$

och

$$x^2 + y^2 - 16x + 2y = -64 \quad \Leftrightarrow \quad (x-8)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

De två cirklarna har alltså mittpunkterna $(0,2)$ respektive $(8,-1)$. Avståndet mellan dessa punkter ges av $\sqrt{(8-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{73}$ enligt Pythagoras sats.

Svar: (a) 84 olika mordserier. (b) $\sqrt{73}$ km.

5. Detta är en så kallad dubbelsumma. Vi ser att m är ett heltal mellan 2 och 511, och summerar den inre summan först:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k 1^{m-k} = (1+x)^m$$

för alla heltal $m \geq 0$ enligt binomialsatsen. Då erhåller vi alltså

$$\sum_{m=2}^{511} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k = \sum_{m=2}^{511} (1+x)^m.$$

Detta är en geometrisk summa med kvoten $q = 1 + x$, så

$$\sum_{m=2}^{511} (1+x)^m = (1+x)^2 \sum_{m=0}^{509} (1+x)^m = (1+x)^2 \frac{(1+x)^{510} - 1}{1+x-1} = \frac{(1+x)^{512} - (1+x)^2}{x},$$

åtminstone om $x \neq 0$. Om $x = 0$ så blir summan noll ty varje term är lika med noll.

Svar: $\dfrac{(1+x)^{512} - (1+x)^2}{x}$ då $x \neq 0$ och 0 då $x = 0$.