LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN2
Datum: 2011-11-12
Institution: MAI

Dugga 2 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN2 2011-11-12 08–12

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Finn alla reella lösningar till $\ln(1-2x)+\sqrt{\pi}=\ln(x)$. (2p)

   (b) Bestäm det minsta heltal n som uppfyller $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+2k)>99$. (1p)

2. (a) Förenkla $\exp(\sqrt{(\ln x)^2})$. (1p)

   (b) Låt $f(x)=e^{2x}+2e^{x}+1$. Bestäm D_f och (om möjligt) f^{-1}. (2p)

3. (a) För vilka reella x gäller att $2^{1-x/3}-2^{x/3}+1\geq 0$? (2p)

   (b) Vilka reella x uppfyller att $\sqrt{x}+2x=1$? (1p)

4. (a) För vilka reella v gäller att $\sin(2v+\pi)=\cos(v)$? (1p)

   (b) Finn alla reella x så att $2\sin^3 x-3\sin^2 x-3\sin x+2=0$. (2p)

5. Finn alla komplexa lösningar till $z^6+729=0$.
   Ange eventuella lösningar på formen $z=a+ib$, a, $b\in\mathbf{R}$. (3p)

6. (a) Förenkla $\dfrac{\arccos(\cos 7)}{\arcsin(\sin 3)}$. (1p)

   (b) Förenkla $\arctan(2)+\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$. (2p)

7. (a) Som bekant är $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ för reella x. Använd detta samband för att härleda Eulers formler: $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ och $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. (1p)

   (b) Bevisa att $|z+w|\leq|z|+|w|$ för alla komplexa tal z och w. (2p)

Lösningsskisser för TATA68, 2011-11-12

1. (a) För att ekvationen skall vara definierad krävs att $0 < x < 1/2$. Om x uppfyller detta villkor gäller

$$\ln(1-2x) + \sqrt{\pi} = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln(1-2x)} e^{\sqrt{\pi}} = e^{\ln x} \quad \Leftrightarrow \quad (1-2x)e^{\sqrt{\pi}} = x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{e^{\sqrt{\pi}}}{1+2e^{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{2+e^{-\sqrt{\pi}}}.$$

Eftersom $e^{-\sqrt{\pi}} > 0$ (exponentialfunktionen är alltid positiv för reella argument), så ser vi att svaret uppfyller villkoren $0 < x < 1/2$, så detta är en lösning.

(b) Vi ser att summan är aritmetisk, så

$$\sum_{k=1}^{n} (1+2k) = \frac{3+1+2n}{2} \cdot n = 2n + n^2.$$

Om detta uttryck skall vara strikt större än 99 måste $n \geq 10$ ($n = 9$ ger precis 99). Det minsta talet blir alltså $n = 10$.

Svar: (a) $\dfrac{1}{2+e^{-\sqrt{\pi}}}$ (b) $n = 10$.

2. (a) Vi förenklar:

$$\exp(\sqrt{(\ln x)^2}) = \exp(|\ln x|) = \begin{cases} \exp(-\ln x), & 0 < x \leq 1, \\ \exp(\ln x), & x > 1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

(b) Funktionen kan skrivas $y = f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 = (e^x + 1)^2$. Vi kan se detta genom att, t ex, låta $t = e^x$ och faktorisera $t^2 + 2t + 1$. Definitionsmängden för f är alla reella tal, och vi ser att $y > 1$. Vi löser ut x ur ekvationen, under antagandet att $y > 1$:

$$y = (e^x + 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y} = e^x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y} - 1 = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(\sqrt{y} - 1).$$

Vi får alltså $x = f^{-1}(y) = \ln(\sqrt{y} - 1)$, eller ekvivalent, $y = f^{-1}(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$.

Svar: (a) $\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$ (b) $D_f = \mathbf{R}$ och $f^{-1}(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$.

3. (a) Låt $t = 2^{x/3}$. Vi ser att $t > 0$ och att

$$2^{1-x/3} - 2^{x/3} + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{t} - t + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(t+1)(t-2)}{t} \leq 0.$$

Vi gör en teckentabell:

		-1		0		2	
$t+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
t	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$t-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(t+1)(t+2)}{t}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Här ser vi att $t \leq -1$ och $0 < t \leq 2$ är de sökta intervallen, men eftersom $t > 0$ så kan inte det första hända. Totalt sett har vi bara $t \leq 2$, eller uttryckt i x: $x \leq 3$.

(b) För att ekvationen skall vara definierad krävs att $x \geq 0$. Vi har

$$\sqrt{x} + 2\,x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = (1-2x)^2,\; x \geq 0,\; 1 - 2x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 5x + 1 = 0,\; 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Andragradsekvationen har lösningarna $x = 1$ och $x = 1/4$, men $x = 1$ uppfyller inte kraven.

Svar: (a) $x \leq 3$ (b) $x = \dfrac{1}{4}$.

4. (a) Vi använder formeln $\sin a = \cos(\pi/2 - a)$ och erhåller

$$\sin(2v+\pi) = \cos(v) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - (2v+\pi)\right) = \cos(v) \quad \Leftrightarrow \quad -2v - \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \pm v$$

Vi får alltså två fall, ett då

$$3v = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}$$

och ett då

$$v = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Här är n ett godtyckligt heltal.

(b) Vi låter $t = \sin x$, och ser att ekvationen kan skrivas

$$t^3 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 = 0.$$

Vi ser att $t = -1$ är en rot, och polynomdivision följt av lösning av andragradsuttryck ger att

$$(t+1)(2t-1)(t-2) = 0.$$

Om $t = \sin x = 2$ så saknas lösningar ($\sin x \leq 1$). Om $t = \sin x = -1$ så är $x = -\pi/2 + 2n\pi$ och om $t = \sin x = 1/2$ så är $x = \pi/6 + 2n\pi$ eller $x = 5\pi/6 + 2n\pi$. Återigen är n godtyckligt heltal.

Svar: (a) $v = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ eller $v = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2n\pi}{3}$.
(b) $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ samt $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.

5. Vi börjar med att skriva -729 på polär form:

$$z^6 = -729 = 729e^{i\pi} = 3^6 e^{i\pi}.$$

Låt $z = re^{i\theta}$, där $r > 0$. Då måste $z^6 = r^6 e^{6i\theta} = 3^6 e^{i\pi}$, så $r^6 = 3^6$ och $6\theta = \pi + 2\pi n$ där n är heltal (absolutbeloppet och argumenten måste stämma överens). Detta ger att $r = 3$ och att $\theta = \pi/6 + n\pi/3$. Våra lösningar blir nu

$$z = 3e^{i(\pi/6 + n\pi/3)} = 3e^{i(1+2n)\pi/6}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Om vi förenklar dessa får vi lösningarna

$$z = \pm 3i, \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \qquad z = \pm\frac{3}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Svar: $z = \pm 3i,\ \pm\dfrac{3}{2}(\sqrt{3} + i),\ \pm\dfrac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$.

6. (a) Vi börjar med täljaren:

$$v_1 = \arccos(\cos 7) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos v_1 = \cos 7, \\ 0 \leq v_1 \leq \pi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_1 = \pm 7 + 2\pi n, \\ 0 \leq v_1 \leq \pi, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = 7 - 2\pi.$$

På samma sätt kan nämnaren skrivas

$$v_2 = \arcsin(\sin 3) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin v_2 = \sin 3, \\ -\pi/2 \leq v_2 \leq \pi/2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 3 + 2\pi n \text{ eller } v_2 = \pi - 3 + 2\pi n, \\ -\pi/2 \leq v_2 \leq \pi/2, \end{cases}$$

vilket är ekvivalent med att $v_2 = \pi - 3$. Följaktligen får vi

$$\frac{\arccos(\cos 7)}{\arcsin(\sin 3))} = \frac{7 - 2\pi}{\pi - 3}.$$

(b) Låt $v = \arctan 2 + \arccos(-4/5)$. Eftersom

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

kan vi skriva

$$\tan v = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arccos(-4/5))}{1 - \tan(\arctan 2)\tan(\arccos(-4/5))}.$$

Vi ser att $\tan(\arctan 2) = 2$, men $\tan(\arccos(-4/5))$ är lite värre. Låt $u = \arccos(-4/5)$. Då är $\cos u = -4/5$ och $0 \leq u \leq \pi$. Minustecknet är lite obehagligt, så vi skriver

$$\cos u = -\frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\pi - u) = \frac{4}{5}.$$

En rätvinklig triangel med katetlängderna 4 och 3 ger att $\tan(\pi - u) = \dfrac{3}{4}$, så $\tan(u) = -\dfrac{3}{4}$ (kan man se t ex från additionsformeln ovan). Vi kan nu räkna ut $\tan v$:

$$\tan v = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 - 2(-\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}.$$

Alltså måste $v = \arctan(1/2) + n\pi$ för något heltal n. Vi uppskattar storleken på ingående arcusfunktioner:

$$\begin{aligned} &0 < \arctan\frac{1}{2} < \arctan 1 = \frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}, \\ &\frac{2\pi}{3} = \arccos\big(-\frac{1}{2}\big) < \arccos\big(-\frac{4}{5}\big) < \arccos(-1) = \pi. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} < v < \pi + \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11\pi}{12} < v < \frac{3\pi}{2}.$$

Eftersom $0 < \arctan(1/2) < \pi/4$ så följer det att $n = 1$ är nödvändigt. Alltså blir den sökta vinkeln $v = \pi + \arctan(1/2)$.

Svar: (a) $\dfrac{7 - 2\pi}{\pi - 3}$ (b) $\pi + \arctan\dfrac{1}{2}$.

7. (a) Eftersom $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$ så följer det att $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ vilket ger den första av Eulers regler. På samma sätt ser vi att $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$, vilket ger den andra.

(b) Låt z och w vara komplexa tal. Vi har

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\cdot\overline{(z+w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w = |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Här har vi utnyttjat regler för konjugat av summor och produkter, samt uppskattningen att realdelen är mindre än beloppet. Att det sistnämnda är sant är tydligt om man tänker på att $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

Svar: Se ovan.