LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN2
Datum: 2012-11-10
Institution: MAI

Dugga 2 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN2 2012-11-10 08–12

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Lös olikheten $\dfrac{10}{x-1} \leq x+2$. (2p)

   (b) Räkna ut summan $\displaystyle\sum_{k=-2}^{4} (-k)^3$. (1p)

2. (a) Skriv $|1-2i| \exp\left(i\dfrac{3\pi}{4}\right)$ på formen $a+bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. (1p)

   (b) Finn alla $z \in \mathbf{C}$ så att $z^2 = i$. (1p)

   (c) Bestäm alla $v \in \mathbf{R}$ så att $\tan(3v+2) = \sqrt{3}$. (1p)

3. (a) Lös ekvationen $\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2)$ för $x \in \mathbf{R}$. (2p)

   (b) Finn alla reella x så att $4^{x+1} - 2^{x+2} = 2^3$. (1p)

4. Undersök vilka x som uppfyller $4\sin 2x \sin 4x - 8 \sin x \sin 2x \cos 3x = 1$ genom att skriva om vänsterledet som en summa av sin / cos-termer och lösa ekvationen som uppstår.

5. Lös ekvationen $\sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x = \sqrt{6}$ för $x \in \mathbf{R}$.

6. (a) Visa att $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ för alla $x \in [-1, 1]$. (1p)

   (b) Lös ekvationen $(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = -\dfrac{\pi^2}{12}$. (2p)

7. Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x) = \sqrt{4 - \ln\left(\dfrac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right)}$.

Lösningsskisser för TATA68, 2012-11-10

1. (a) Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$\frac{10}{x-1} \leq x+2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-12}{x-1} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x+4)}{x-1} \geq 0.$$

Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		-4		1		3	
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x-3)(x+4)}{x-1}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $-4 \leq x < 1$ eller $x \geq 3$.

(b) Summan är varken aritmetisk eller geometrisk, men den består av så få termer och dessutom tar de flesta termerna ut varandra:

$$\sum_{k=-2}^{4} (-k)^3 = 2^3 + 1 + 0 - 1 - 2^3 - 3^3 - 4^3 = -27 - 64 = -91.$$

Svar: (a) $-4 \leq x < 1$ eller $x \geq 3$ (b) -91.

2. (a) Vi förenklar:

$$|1-2i|e^{i3\pi/4} = \sqrt{1+4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{10}}{2}(i-1).$$

(b) För att lösa $z^2 = i$ skriver vi $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, och $i = e^{i\pi/2}$. För att $z^2 = i$ måste

$$\begin{cases} |z^2| & = & |i| \\ \arg(z^2) & = & \arg(i) + 2\pi n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r & = & 1 \\ 2\theta & = & \pi/2 + 2\pi n \end{cases}$$

för något $n \in \mathbf{Z}$. Alltså är $2\theta = \pi/2 + 2\pi n$ så $\theta = \pi/4 + \pi n$.

(c) Vi vet att

$$\tan(3v+2) = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3v + 2 = \frac{\pi}{3} + \pi n \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},$$

där n är ett godtyckligt heltal ($n \in \mathbf{Z}$). Alla dessa v är lösningar då vi aldrig kan få $v = k\pi/2$ för något $k \in \mathbf{Z}$.

Svar: (a) $\frac{\sqrt{10}}{2}(i-1)$ (b) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ (c) $v = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. (a) För att alla ingående uttryck ska vara definierade krävs att $x+1 > 0$, $5+x > 0$, och $x+2 > 0$. Från detta ser vi att $x > -1$ krävs för att samtliga uttryck ska vara definierade. Antag att $x > -1$. Då gäller

$$\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big((x+1)(x+2)\big) = \ln(5+x),$$

och eftersom ln är strängt växande gäller då att

$$(x+1)(x+2) = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3) = 0.$$

Endast $x = 1$ är en lösning.

(b) Låt $t = 2^x$. Då är $t > 0$ och ekvationen kan skrivas

$$4t^2 - 4t - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)(t-2) = 0.$$

Här ser vi att $t = -1$ inte går (då $2^x = -1$ saknar lösning) och att $t = 2$ medför att $2^x = 2$, så $x = 1$.

Svar: (a) $x = 1$ (b) $x = 1$.

4. Vi använder Eulers formler och finner att

$$\begin{aligned}
\sin x \sin 2x \cos 3x &= \frac{1}{-8}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) \\
&= \frac{1}{-8}\left(e^{6ix} + 2 + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix} - e^{4ix} - e^{-4ix}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(1 + \cos 6x - \cos 2x - \cos 4x\right).
\end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned}
\sin 2x \sin 4x &= \frac{1}{-4}\left(e^{6ix} + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\cos 6x - \cos 2x\right).
\end{aligned}$$

Med dessa samband kan vi skriva om ekvationen i fråga enligt

$$-2\cos 6x + 2\cos 2x + 2 + 2\cos 6x - 2\cos 2x - 2\cos 4x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4x = \frac{1}{2},$$

så $4x = \pm\pi/3 + 2\pi n$ eller $x = \pm\pi/12 + \pi n/2$ där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. Vi använder oss av hjälpvinkelmetoden och skriver om vänsterledet som $C\sin(2x+v)$. Då skall alltså

$$C\sin(2x+v) = C\left(\sin 2x \cos v + \cos 2x \sin v\right) = \sqrt{3}\sin 2x - 3\cos 2x.$$

Genom att, till exempel, låta $x = 0$ och $x = \pi/4$, erhåller vi sambanden

$$\begin{cases} C\sin v &= -3 \\ C\cos v &= \sqrt{3} \end{cases}$$

För att bestämma C kvadrerar vi dessa ekvationer och summerar för att finna att

$$C^2 = C^2(\sin^2 v + \cos^2 v) = 12.$$

Vi väljer alltså $C = \sqrt{12}$, och finner v genom att lösa

$$\begin{cases} \cos v &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2} \\ \sin v &= -\frac{3}{\sqrt{12}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Vi väljer $v = -\pi/3$. Vi ska nu lösa ekvationen

$$\sqrt{12}\sin(2x+v) = \sqrt{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x+v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + v = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \\ 2x + v = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi \end{cases}$$

Vi erhåller alltså lösningarna

$$x = \frac{7\pi}{24} + n\pi \qquad \text{och} \qquad x = \frac{13\pi}{24} + n\pi$$

för $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \dfrac{7\pi}{24} + n\pi$ och $x = \dfrac{13\pi}{24} + n\pi$ för $n \in \mathbf{Z}$.

6. (a) Låt $x \in [-1,1]$ och $v = \arcsin x$. Vi visar att $v = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Enligt definition, $\sin v = x$ och $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Vidare,

$$x = \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

och då $0 \leq \pi/2 - v \leq \pi$ måste $\pi/2 - v = \arccos x$. Med andra ord har vi visat att

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Konjugatregeln medför att

$$(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = (\arccos x + \arcsin x)(\arccos x - \arcsin x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right).$$

Detta uttryck skall vara lika med $-\pi^2/12$, så

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right) = -\frac{\pi^2}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: (b) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Vi börjar med att reda ut definitionsmängden. För att logaritmen skall vara definierad krävs

$$\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} > e^{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x > x + 2$$

eftersom logaritmen är strängt växande. Kravet blir alltså att $x > 2$. Vidare måste det som står under kvadratroten vara icke-negativt, så

$$4 - \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln e^4 \geq \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2e^4 \geq e^{2x} - e^{x+2},$$

återigen eftersom logaritmen är strängt växande. Låt $t = e^x$. Vi undersöker när $t^2 - e^2 t - 2e^4 \geq 0$. Vänsterledet är ett andragradsuttryck som vi kan faktorisera:

$$t^2 - e^2 t - 2e^4 = \left(t - \frac{e^2}{2}\right)^2 - \frac{e^4}{4} - 2e^4 = \left(t - \frac{e^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3e^2}{2}\right)^2 = \left(t - 2e^2\right)\left(t + e^2\right).$$

Detta uttryck är icke-negativt endast då $-e^2 \leq t \leq 2e^2$, eller uttryckt i variabeln x, då

$$-e^2 \leq e^x \leq 2e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2 + \ln 2.$$

Definitionsmängden D_f ges alltså av $2 < x \leq 2 + \ln 2$.

Låt nu $x \in D_f$. Vi löser ekvationen $y = f(x)$ med syfte på x:

$$y = \sqrt{4 - \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad 4 - y^2 = \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{4-y^2} = e^{2x} - e^{x+2}.$$

Liksom ovan behöver vi lösa andragradsekvationen:

$$e^{2x} - e^{x+2} = \left(e^x - \frac{e^2}{2}\right)^2 - \frac{e^4}{4} = 2e^{4-y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^x - \frac{e^2}{2}\right)^2 = e^4\left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$e^x = e^2\left(\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2}\right)^{1/2}\right).$$

Eftersom $x \in D_f$ måste $e^2 < e^x \leq 2e^2$, och då $0 < e^{-y^2} \leq 1$ är

$$e^x = e^2 \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2} \right)^{1/2} \right) < e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

så "minusroten" kan inte vara en lösning. Den andra roten fungerar dock utmärkt:

$$e^2 = e^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) < e^x = e^2 \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2} \right)^{1/2} \right) < e^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 2e^2.$$

Varje y-värde ger alltså högst ett x-värde, och därmed existerar inversen eftersom vi precis visat hur man kan räkna ut detta x-värde.

Svar: Definitionsmängd: $2 < x \leq 2 + \ln 2$; $f^{-1}(x) = 2 + \ln \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2} \right)^{1/2} \right)$.