Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN1

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2013–10–25 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=34}^{378}\left(-3+\frac{k}{2}\right)$. (1 p)

   (b) Använd polynomdivision till att skriva om $\dfrac{2x^4-3x+1}{x^2-x-1}$ på en form där man enkelt kan läsa av polynomdivisionens kvot och rest. (1 p)

   (c) Beräkna $\left|-1+i\dfrac{4-i}{3i-1}\right|$. (1 p)

2. (a) Finn alla lösningar till ekvationen $\sin 7x = \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{7}\right)$. (1 p)

   (b) Lös ekvationen $4\sin x\cos x = 1$. (1 p)

   (c) Beräkna $\sin v$ om $\cos v = -\dfrac{1}{5}$, $\pi < v < 2\pi$. (1 p)

3. (a) För vilka reella x gäller $2^{3x+2}-2^{2x+3}-2^{x+2}-2^{x+1}-2^{x}=4^{x+1}-30$? (2 p)

   (b) Lös ekvationen $(\ln x)^2-\ln(x^2)=1$. (1 p)

4. Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-4}{1-x}\right)$.

5. Skriv $\sin x\sin 2x\cos 4x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer.
   Lös också ekvationen $4\sin x\sin 2x\cos 4x = \cos 3x+\cos 5x$.

6. (a) Definiera e^{ix} för $x\in\mathbf{R}$. (1 p)

   (b) Skriv $-1-3i$ på polär form. (1 p)

   (c) Beräkna $\arccos\left(\sin\dfrac{37\pi}{12}\right)$. (1 p)

7. Skriv $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k+1}$, där $x\neq 0$ och $N=0,1,2,\ldots$, på enklast möjlig form.

Dugga 2 i TATM79, 2013-10-25, lösningsförslag

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=34}^{378}\left(-3+\frac{k}{2}\right)$ är en aritmetisk summa med första term $= -3+\dfrac{34}{2} = 14$, sista term $= -3+\dfrac{378}{2} = 186$ och med $378-34+1 = 345$ termer. Alltså är summan lika med $\dfrac{14+186}{2}\cdot 345 = 100\cdot 345 = 34\,500$.

   Svar: $34\,500$.

   (b) Kalkyl med liggande stolen ger

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 2x^2 & + & 2x & + & 4 & & \\
\hline
 2x^4 & & & -3x & +1 & & x^2-x-1 \\
 -\ (2x^4 & -2x^3 & -2x^2) & & & & \\
\hline
 & 2x^3 & +2x^2 & -3x & +1 & & \\
 & -\ (2x^3 & -2x^2 & -2x) & & & \\
\hline
 & & 4x^2 & -x & +1 & & \\
 & & -\ (4x^2 & -4x & -4) & & \\
\hline
 & & & 3x & +5 & &
\end{array}
$$

   dvs kvoten är $2x^2+2x+4$ och resten är $3x+5$, så av detta följer att
   $\dfrac{2x^4-3x+1}{x^2-x-1} = 2x^2+2x+4+\dfrac{3x+5}{x^2-x-1}$.

   Svar: $2x^2+2x+4+\dfrac{3x+5}{x^2-x-1}$.

   (c) $\left|-1+i\dfrac{(4-i)}{3i-1}\right| = \left|\dfrac{-(3i-1)+i(4-i)}{3i-1}\right| = \left|\dfrac{2-i}{3i-1}\right| = \dfrac{|2-i|}{|3i-1|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   Svar: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. (a) $\sin 7x = \sin\left(3x+\dfrac{\pi}{7}\right) \iff \begin{cases} 7x = 3x+\dfrac{\pi}{7}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 7x = \pi-\left(3x+\dfrac{\pi}{7}\right)+n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 4x = \dfrac{\pi}{7}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 10x = \dfrac{6\pi}{7}+n2\pi \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{28}+\dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{3\pi}{35}+\dfrac{n\pi}{5} \end{cases}$ där n är heltal.

   Svar: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{28}+\dfrac{n\pi}{2} \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{3\pi}{35}+\dfrac{n\pi}{5} \end{cases}$ där n är heltal.

   (b) $4\sin x\cos x = 1 \iff 2\sin 2x = 1 \iff \sin 2x = \dfrac{1}{2} \iff \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{6}+n2\pi \\ \text{eller} \\ 2x = \pi-\dfrac{\pi}{6}+n2\pi \end{cases} \iff$

   $\iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12}+n\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{12}+n\pi \end{cases}$ där n är heltal. Svar: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12}+n\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{12}+n\pi \end{cases}$ där n är heltal.

(c) Eftersom $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ och $\sin v \leq 0$ (eftersom $\pi < v < 2\pi$) så följer att $\sin v = -\sqrt{1-\cos^2 v} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. Svar: $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

3. (a) $2^{3x+2} - 2^{2x+3} - 2^{x+2} - 2^{x+1} - 2^x = 4^{x+1} - 30 \iff$
$\iff 4\cdot(2^x)^3 - 8\cdot(2^x)^2 - 4\cdot 2^x - 2\cdot 2^x - 2^x = 4\cdot(2^x)^2 - 30 \iff$
$\iff 4\cdot(2^x)^3 - 12\cdot(2^x)^2 - 7\cdot 2^x + 30 = 0$. Sätt $t = 2^x > 0$ så fås ekvationen $4t^3 - 12t^2 - 7t + 30 = 0,\ t > 0$. Prövning visar att $t = 2$ är en lösning och polynomdivision ger $4t^3 - 12t^2 - 7t + 30 = 0 \iff 4(t-2)\left(t^2 - t - \frac{15}{4}\right) = 0$.
$t^2 - t - \frac{15}{4} = 0 \iff t = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{15}{4}} = \frac{1 \pm 4}{2} \iff t = \frac{5}{2}$ (eller $t = -\frac{3}{2}$, men $t > 0$).
Således har vi fått $2^x = 2$ eller $2^x = \frac{5}{2}$. Använder vi injektiviteten hos ln så fås

- $2^x = 2 = 2^1 \iff x = 1$.
- $2^x = \frac{5}{2} \iff \ln 2^x = \ln\frac{5}{2} \iff x\ln 2 = \ln\frac{5}{2} \iff x = \frac{\ln(5/2)}{\ln 2} = $
$= \frac{\ln 5 - \ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln 5}{\ln 2} - 1$.

Svar: $x = 1$ eller $x = \frac{\ln 5}{\ln 2} - 1$.

(b) $\ln x$ är definierad då $x > 0$ och $\ln\left(x^2\right)$ är definierad då $x \neq 0$, så vänsterledet är definierat då $x > 0$ För dessa x fås
$(\ln x)^2 - \ln\left(x^2\right) = 1 \iff (\ln x)^2 - 2\ln x = 1 \iff$ / sätt $\ln x = t$ / $\iff$
$\iff t^2 - 2t - 1 = 0 \iff t = 1 \pm \sqrt{2} \iff \ln x = 1 \pm \sqrt{2} \iff x = e^{1\pm\sqrt{2}}$ (och båda dessa uppfyller förstås villkoret $x > 0$).

Svar: $x = e^{1\pm\sqrt{2}}$.

4. $f(x)$ är definierad då $\frac{x-4}{1-x} > 0$ och teckentabellen

x		1		4	
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$1-x$	$+$	0	$-$		$-$
$\frac{x-4}{1-x}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$

visar att olikheten gäller då $1 < x < 4$. För dessa x fås att $y = \ln\frac{x-4}{1-x} \iff$
$\iff e^y = \frac{x-4}{1-x} \iff (1-x)e^y = x - 4 \iff e^y - xe^y = x - 4 \iff$
$\iff x\left(e^y + 1\right) = e^y + 4 \iff x = \frac{e^y+4}{e^y+1}$ dvs ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y) = \frac{e^y+4}{e^y+1}$.

Svar: $D_f = \{x : 1 < x < 4\},\ f^{-1}(x) = \frac{e^x+4}{e^x+1}$.

5. $\sin x \sin 2x \cos 4x = \Big/ \text{Eulers formler} \Big/ = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \cdot \dfrac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i} \cdot \dfrac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2} =$

$= -\dfrac{1}{8}\left(e^{7ix}+e^{-7ix}-e^{5ix}-e^{-5ix}-e^{3ix}-e^{-3ix}+e^{ix}+e^{-ix}\right) =$

$= -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2} - \dfrac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} - \dfrac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) =$

$= -\dfrac{1}{4}(\cos 7x - \cos 5x - \cos 3x + \cos x).$

Av detta följer att $4\sin x \sin 2x \cos 4x = \cos 3x + \cos 5x \iff$
$\iff -\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x - \cos x = \cos 3x + \cos 5x \iff \cos 7x + \cos x = 0 \iff$
$\cos 7x = -\cos x \iff \cos 7x = \cos(x+\pi) \iff 7x = \pm(x+\pi) + n2\pi \iff$

$$\iff \begin{cases} 6x = \pi + n2\pi \\ \text{eller} \\ 8x = -\pi + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\sin x \sin 2x \cos 4x = \dfrac{1}{4}(-\cos 7x + \cos 5x + \cos 3x - \cos x).$

Ekvationen har lösningarna $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{4} \end{cases}$ där n är heltal.

6. (a) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ då x är reellt.

(b) $-1-3i = \sqrt{10}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}} - \dfrac{3i}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}(\cos x + i\sin x) = \sqrt{10}\, e^{ix}$,

där $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin x = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \iff \begin{cases} \tan x = 3 \\ x \text{ ligger i 3:e kvadranten} \end{cases} \iff$

$\iff x = \arctan 3 + \pi + 2n\pi$ där n är heltal. Således är $-1-3i = \sqrt{10}\, e^{i(\pi + \arctan 3)}$ t.ex.

Svar: $\sqrt{10}\, e^{i(\pi+\arctan 3)}$.

(c) $\arccos\left(\sin\dfrac{37\pi}{12}\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{37\pi}{12}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{31\pi}{12}\right)\right) =$

$= \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{31\pi}{12} + 2\pi\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right) =$

$= \Big/ \text{eftersom } 0 \le \dfrac{7\pi}{12} \le \pi \Big/ = \dfrac{7\pi}{12}.$

Svar: $\dfrac{7\pi}{12}$.

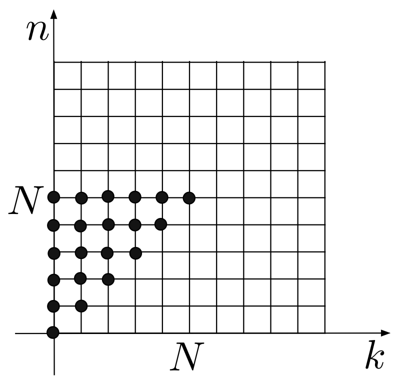
7. Allmänt är $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a(n,k) = \sum_{k=0}^{N}\big(a(k,k)+a(k+1,k)+\cdots+a(N,k)\big) =$

$= \big(a(0,0)+a(1,0)+\cdots+a(N,0)\big)+\big(a(1,1)+a(2,1)+\cdots+a(N,1)\big)+\cdots+a(N,N) =$

$= a(0,0)+\big(a(1,0)+a(1,1)\big)+\cdots+\big(a(N,0)+a(N,1)+\cdots+a(N,N)\big) =$

$$= \sum_{k=0}^{N}\big(a(k,0)+a(k,1)+\cdots+a(k,k)\big) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a(n,k).$$

$\Bigg(\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a(n,k)$ betyder att man summerar alla $a(n,k)$ där n och k är heltal sådana att $0 \le k \le N,\ k \le n \le N$, vilket även kan beskrivas av att $0 \le n \le N,\ 0 \le k \le n$, se figur nedan (man summerar radvis istället för kolonnvis).$\Bigg)$



Speciellt fås då att

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k+1} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{k+1} = x\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot(-x)^k =$$

$$= \Big/\text{Binomialutveckling}\Big/ = x\sum_{n=0}^{N}(1-x)^n =$$

$$= \Big/\text{geometrisk summa, 1:a term} = 1\text{, kvot} = (1-x) \neq 1 \text{ och } N+1 \text{ termer}\Big/ =$$

$$= x\cdot\frac{1-(1-x)^{N+1}}{1-(1-x)} = 1-(1-x)^{N+1}.$$

Svar: $1-(1-x)^{N+1}$.