Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN2

Dugga 2 i Matematisk grundkurs

2013–11–16 kl 8.00–12.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

Uppgifterna bedöms med 0–3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 9 poäng. Poängen på godkända duggor summeras och avgör slutbetyget.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter duggans slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) För vilka x är $x^3 + x^2 > 2x$? (1 p)

   (b) Beräkna summan $49 + 7 + 1 + \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{7^{30}}$. (1 p)

   (c) Visa att polynomet $p(x) = x^4 + 1$ saknar reella nollställen. (1 p)

2. (a) Beräkna $\tan\left(\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$. (1 p)

   (b) Finn alla lösningar till ekvationen $\cos 2x = \cos(3 - 4x)$. (1 p)

   (c) Lös ekvationen $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \sin^2 x$. (1 p)

3. (a) För vilka reella x gäller $e^x + 4e^{-x} = 4$? (1 p)

   (b) Lös ekvationen $\ln(3 - x) = \ln(1 + x) + \ln(2x - 1)$. (2 p)

4. Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x) = \ln\left(\sqrt{7} - \ln(1 + 2x)\right)$.

5. Finn alla $z \in \mathbf{C}$ så att $(iz)^5 + 32 = 0$.

6. Lös ekvationen $\arctan 4x = \arctan\left(-\dfrac{5x}{11}\right) - \arctan x$.

7. För vilka x gäller att $2(1 - \cos x)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin nx + \sin x - \sin(n + 1)x$ för alla positiva heltal n?

Lösningsförslag

1. (a) Faktorisering ger

$$\begin{aligned} x^3+x^2>2x \quad &\Leftrightarrow \quad x^3+x^2-2x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2+x-2)>0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(x+2)(x-1)>0 \end{aligned}$$

och en teckentabell visar att detta gäller precis då $-2<x<0$ eller $x>1$.

(b) Geometrisk summa med kvoten 7^{-1}:

$$49(1+7^{-1}+\cdots+7^{-32}) = 49\cdot\frac{1-7^{-33}}{1-7^{-1}} = \frac{343-7^{-30}}{6}.$$

(c) Reella nollställen, så $x\in\mathbf{R}$. Eftersom $x^4\geq 0$ så måste $p(x)\geq 1$. Alltså kan $p(x)$ aldrig bli noll. Reella nollställen saknas.

Svar: (a) $-2<x<0$ eller $x>1$ (b) $\dfrac{343-7^{-30}}{6}$ (c) Se ovan.

2. (a) Eftersom $v=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\in]0,\pi/2[$ kan vi ur en hjälptriangel finna att $\cos v=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ och därmed att $\tan v=\dfrac{1}{2}$.

(b) Ur enhetscirkeln ser vi att

$$\cos(3-4x)=\cos 2x \quad \Leftrightarrow \quad 3-4x+2\pi n=\pm 2x$$

vilket leder till två fall. Fall 1:

$$3-4x+2\pi n=2x \quad \Leftrightarrow \quad 6x=3+2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{3}.$$

Fall 2:

$$3-4x+2\pi n=-2x \quad \Leftrightarrow \quad 2x=3+2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3}{2}+\pi n.$$

Här är $n\in\mathbf{Z}$ ett godtyckligt heltal.

(c) Vi erhåller

$$\begin{aligned} \cos^2 x=\frac{1}{2}+\sin^2 x \quad &\Leftrightarrow \quad 2-2\sin^2 x=1+2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x=\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \sin x=\pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Två fall alltså:

$$\sin x=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi n \text{ eller } x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

och

$$\sin x=-\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \text{ eller } x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n.$$

Svar: (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi n}{3}$ eller $\dfrac{3}{2}+\pi n$ (c) Se ovan.

3. (a) Det följer att
$$e^x + 4e^{-x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 4e^x + 4 = 0.$$
Låt $t = e^x$. Då måste $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$, vilket endast $t = 2$ uppfyller. Alltså är $e^x = 2$, eller ekvivalent, $x = \ln 2$.

(b) För att alla ingående uttryck skall vara definierade måste $\frac{1}{2} < x < 3$. Om detta är uppfyllt är ursprungsekvationen ekvivalent med
$$\ln(3-x) = \ln((1+x)(2x-1)) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$
eftersom $x = -2$ ej uppfyller villkoret.

Svar: (a) $x = \ln 2$ (b) $x = 1$

4. Vi börjar med att bestämma den största möjliga definitionsmängden. Kraven som måste gälla är att $1 + 2x > 0$ samt $\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0$. Alltså måste $x > -\frac{1}{2}$ och
$$\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{7}} > 1 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right) > x$$
eftersom ln är strängt växande. Således ges D_f av de $x \in \mathbf{R}$ så att
$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right)$$
Låt $y \in \mathbf{R}$. Då gäller att
$$\begin{aligned} y = \ln(\sqrt{7} - \ln(1+2x)) \quad &\Rightarrow \quad \exp(y) = \sqrt{7} - \ln(1+2x) \\ &\Rightarrow \quad 1 + 2x = \exp(\sqrt{7} - \exp(y)) \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right). \end{aligned}$$
Eftersom vi bara har ett alternativ ges inversen av
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(x)) - 1\right).$$

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right)\right\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(x)) - 1\right)$

5. Vi formulerar om lite:
$$0 = (iz)^5 + 32 = iz^5 + 32 = i(z^5 - 32i) \quad \Leftrightarrow \quad z^5 = 32i = 2^5 e^{i\pi/2}.$$
Låt $z = re^{i\theta}$ där $r > 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Då måste $r^5 = |z^5| = |32i| = 2^5$, så $r = 2$ då $r > 0$. Vidare gäller att $\arg(z^5) = 5\theta = \arg 32i = \pi/2 + 2\pi n$, så
$$5\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}.$$

De z som löser ekvationen ges alltså av

$$z = 2e^{i(\pi/10+2\pi n/5)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Svar: $z = 2e^{i(\pi/10+2\pi n/5)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4.$

6. Då arctan är udda gäller att

$$\arctan 4x = \arctan\left(-\frac{5x}{11}\right) - \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 4x + \arctan x = -\arctan\left(\frac{5x}{11}\right).$$

Eftersom arctan är en strängt växande funktion så är högerledet strängt avtagande och vänsterledet strängt växande. Kurvorna kan alltså högst passera varandra en gång. Eftersom vi direkt kan se att detta sker vid $x = 0$ så är detta den enda lösningen!

Alternativt argument. Ekvationen medför att (efter att vi tar tan på båda sidor och använder formeln för dubbla vinkeln)

$$\frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan 4x)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan 4x)} = \tan\left(-\arctan\left(\frac{5x}{11}\right)\right)$$

eller

$$\frac{5x}{1-4x^2} = -\frac{5x}{11}.$$

Här ser vi att $x = 0$ eller $1 - 4x^2 = 11$ måste gälla. Men $4x^2 = -10$ saknar reella lösningar så $x = 0$ är enda möjligheten.

Svar: $x = 0$ enda lösningen.

7. Vi börjar med att försöka räkna ut summan. Vi Eulers formler kan vi skriva

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\left(e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}.$$

Summan vi nu tar imaginärdelen av är en geometrisk summa med kvoten e^{ix}. Vi räknar ut denna:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = -1 + \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = -1 + \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = -1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}},$$

där vi har förlängt med konjugatet. Likheten gäller så länge $e^{ix} \neq 1$. Nämnaren kan skrivas om som $2 - 2\cos x$, och vi erhåller då

$$\operatorname{Im}\left(-1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}}\right) = \frac{\sin nx - \sin(n+1)x - \sin x}{2(1-\cos x)}.$$

Alltså måste

$$2(1-\cos x)\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \sin nx - \sin(n+1)x - \sin x$$

såvida inte $e^{ix} = 1$. Men detta händer precis då $x = 2k\pi$ för något $k \in \mathbf{Z}$, och då är $\cos x = 1$ och alla sinus-termer i vänsterledet lika med noll. Likheten gäller alltså även då. Vi har nu visat att likheten gäller för alla $x \in \mathbf{R}$.

Svar: alla $x \in \mathbf{R}$.