# Dugga 2 i TATA68, 2010-10-20, lösningsförslag

1. (a) $\cos(2t-\pi/3) = \cos(t+\pi/2) \Leftrightarrow 2t-\pi/3 = \pm(t+\pi/2)+2\pi n \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 5\pi/6 + 2\pi n \\ \text{eller} \\ t = -\pi/18 + 2\pi n/3 \end{cases}$

   Svar: $t = 5\pi/6 + 2\pi n$ eller $t = -\pi/18 + 2\pi n/3$, $n$ heltal.

   (b) Eftersom $0 < 1/\sqrt{6} < 1$ är $0 < \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}} < \frac{\pi}{2}$, och $\arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$ kan åskådliggöras i en rätvinklig triangel med kateterna 1 och $\sqrt{5}$ och hypotenusa $\sqrt{6}$ (rita figur). Ur detta följer att $\tan(\arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

   Svar: $1/\sqrt{5}$

   (c) Aritmetisk summa differens 6. Första term är $6 \cdot 12 + 2 = 74$, sista term är $6 \cdot 154 + 2 = 926$ och antal termer är $154 - 12 + 1 = 143$. Därmed blir summan $143 \cdot \frac{74 + 926}{2} = \frac{143000}{2} = 71500$.

   Svar: 12800.

2. (a) $f(x)$ är definierad då $3 - x > 0$ och $x - 2 > 0$, dvs då $2 < x < 3$. För dessa $x$ är $y = \ln(3-x) - \ln(x-2) = \ln \frac{3-x}{x-2} \Longleftrightarrow e^y = \frac{3-x}{x-2} \Longleftrightarrow (x-2)e^y = 3-x \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x(e^y+1) = 2e^y + 3 \Longleftrightarrow x = \frac{2e^y+3}{e^y+1} = f^{-1}(y)$ dvs $f$ har invers (varje $y$ ger högst ett $x$).

   Svar: $D_f = ]2, 3[$ , $f^{-1}(x) = \dfrac{2e^x + 3}{e^x + 1}$

   (b) $\ln(e^x + 1) = \ln(e^x) + 1 = x + 1 \Longleftrightarrow \Big/ e^x + 1 > 0$ och $\ln$ är injektiv $\Big/ \Longleftrightarrow$

   $\Longleftrightarrow e^x + 1 = e^{x+1} = e \cdot e^x \Longleftrightarrow (e-1)e^x = 1 \Longleftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Longleftrightarrow$

   $\Longleftrightarrow \Big/ \frac{1}{(e-1)} > 0 \Big/ \Longleftrightarrow x = \ln \frac{1}{e-1} = -\ln(e-1)$.

   Svar: $x = -\ln(e-1)$

3. (a) $e^{4x^2+4x-3} > 1 = e^0 \Longleftrightarrow \Big/$exp är strängt växande$\Big/ \Longleftrightarrow 4x^2 + 4x - 3 > 0 \Longleftrightarrow$

   $x^2 + x - \frac{3}{4} > 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow \left(x + \frac{1}{2} - 1\right)\left(x + \frac{1}{2} + 1\right) > 0$

   $\Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$ eller $x < -\frac{3}{2}$ (en teckentabell kan vara användbar).

   Svar: $x > \frac{1}{2}$ eller $x < -\frac{3}{2}$

   (b) $6 \cdot 8^x + 1 = 2^{x+1} + 4^{x+1} + 2^{2x} \Longleftrightarrow 6 \cdot (2^3)^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 4 \cdot (2^2)^x + 2^{2x} \Longleftrightarrow$ $6 \cdot (2^x)^3 + 1 = 2 \cdot 2^x + 5 \cdot (2^x)^2$. Med $t = 2^x > 0$ fås ekvationen $6t^3 + 1 = 2t + 5t^2 \Longleftrightarrow$ $6t^3 - 5t^2 - 2t + 1 = 0 \Longleftrightarrow \Big/ t = 1$ är en lösning, därefter polynomdivision$\Big/ \Longleftrightarrow$ $(t-1)(6t^2 + t - 1) = 0 \Longleftrightarrow (t-1)(2t+1)(3t-1) = 0 \Longleftrightarrow t = 1$ eller $t = 1/3$ (eftersom $t > 0$). Således fås $2^x = 1$ eller $2^x = \frac{1}{3}$ dvs $x = 0$ eller $x \ln 2 = \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$ dvs $x = 0$ eller $x = -\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

   Svar: $x = 0$ eller $x = -\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$

4. Eulers formler ger

$$\sin 2x\cos 4x+\cos 6x\sin 8x=\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\cdot\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}+\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2}\cdot\frac{e^{8ix}-e^{-8ix}}{2i}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{6ix}+e^{-2ix}-e^{2ix}-e^{-6ix}+e^{14ix}-e^{-2ix}+e^{2ix}-e^{-14ix}}{2i}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{6ix}-e^{-6ix}}{2i}+\frac{e^{14ix}-e^{-14ix}}{2i}\right)=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 14x).$$

$$f(x)=0 \iff \sin 6x+\sin 14x=0 \iff \sin 14x=-\sin 6x \iff$$
$$\iff \sin 14x=\sin(-6x) \iff \begin{cases}14x=-6x+2\pi n\\ \text{eller}\\ 14x=\pi+6x+2\pi n\end{cases} \iff \begin{cases}x=\pi n/10\\ \text{eller}\\ x=\pi/8+\pi n/4\end{cases}$$

Svar: $f(x)=\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 14x)$, $f(x)=0$ då $x=\pi n/10$ eller $x=\pi/8+\pi n/4$ ($n$ heltal)

5. Om den geometriska summan har första term $a$ och kvot $k$ så är de fem första termerna $a,\ ak,\ ak^2,\ ak^3,\ ak^4$.

Villkoren ger $\begin{cases}a-ak^2=2\\ a+ak+ak^2+ak^3=5\end{cases}$ dvs $\begin{cases}a(1-k^2)=2\\ a(1+k+k^2+k^3)=5.\end{cases}$ Den första ekvationen ger $a=\dfrac{2}{1-k^2}$ vilket insatt i den andra ger $\dfrac{1+k+k^2+k^3}{1-k^2}=\dfrac{5}{2} \iff$

$$\iff \Big/\text{eftersom } k\neq 1\text{, eller hur?}\Big/ \iff \frac{1-k^4}{(1-k)(1-k^2)}=\frac{5}{2} \iff$$
$$\iff \frac{(1-k^2)(1+k^2)}{(1-k)(1-k^2)}=\frac{5}{2} \iff \Big/\text{eftersom } 1-k^2\neq 0\Big/ \iff \frac{1+k^2}{1-k}=\frac{5}{2} \iff$$
$$2k^2+2=5k-5 \iff 2k^2+5k-3=0 \iff k=-3 \text{ eller } k=1/2.$$

$k=-3$ ger $a=2/(1-k^2)=-1/4$ och femte termen blir $ak^4=-81/4$

$k=1/2$ ger $a=8/3$ och femte termen $1/6$.

Svar: Femte termen är $-81/4$ eller $1/6$

6. $4z^4+2z^3+2iz+i=0 \iff 2z^3(2z+1)+i(2z+1)=0 \iff (2z^3+i)(2z+1)=0 \iff 2z^3=-i$ eller $z=-1/2$.

$2z^3=-i \iff z^3=-\dfrac{i}{2}=\dfrac{1}{2}e^{-i\pi/2}$. Med $z=re^{iv}$ fås $z^3=r^3e^{3iv}$ och vi får ekvationen $r^3e^{3iv}=\dfrac{1}{2}e^{-i\pi/2}$. Identifiering av absolutbelopp och argument ger sambanden $r^3=1/2$ resp $3v=-\pi/2+2\pi n$, dvs $r=1/\sqrt[3]{2},\ v=-\pi/6+2\pi n/3$,så lösningarna till $2z^3=-i$ är $z=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{(-\pi/6+2\pi n/3)i},\ n=0,1,2.$

Svar: $z=-1/2$ eller $z=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}e^{(-\pi/6+2\pi n/3)i},\ n=0,1,2$

7. $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - 3\sin 2x = \sqrt{12}\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) =$

$= 2\sqrt{3}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\cos 2x + \cos\frac{5\pi}{6}\sin 2x\right) = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right).$

Eftersom $-\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{6} \iff -\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, så är $f$ strängt växande, och därmed injektiv. $y = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) \iff \sin\left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{y}{2\sqrt{3}} \iff$

$\iff 2x + \frac{5\pi}{6} = \begin{cases} \arcsin\frac{y}{2\sqrt{3}} + 2\pi n \\ \text{eller} \\ \pi - \arcsin\frac{y}{2\sqrt{3}} + 2\pi n \end{cases}$ ($n$ heltal), och eftersom $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$

så fås $2x + \frac{5\pi}{6} = \arcsin\frac{y}{2\sqrt{3}} \iff x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{12} = f^{-1}(y).$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2\sqrt{3}} - \frac{5\pi}{12}$