Dugga 2 i TATA68, 2010-11-13, lösningsförslag

1. (a) Geometrisk summa med kvot$=2$, första term$=2^{10}$ och antal termer$=91$ ger summan $2^{10}\cdot\dfrac{2^{91}-1}{2-1}=2^{101}-2^{10}$.

   Svar: $2^{101}-2^{10}$

   (b) $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{3}{x-1}\Leftrightarrow\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{-x-8}{(x+2)(x-1)}<0\Leftrightarrow\dfrac{x+8}{(x+2)(x-1)}>0.$

   Teckentabellen

x		-8		-2		1	
$x+8$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+8}{(x+2)(x-1)}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

   visar att olikheten gäller för $-8<x<-2$ eller $x>1$.

   Svar: Olikheten gäller för $-8<x<-2$ eller $x>1$

   (c) Binomialutveckling ger att $(2-x)^7=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}2^k(-x)^{7-k}=$

   $$=-x^7+2\binom{7}{1}x^6-2^2\binom{7}{2}x^5+2^3\binom{7}{3}x^4-2^4\binom{7}{4}x^3+2^5\binom{7}{5}x^2-2^6\binom{7}{6}x+2^7.$$

2. (a) $\ln\dfrac{7-x}{2-x}$ är definierat då $\dfrac{7-x}{2-x}=\dfrac{x-7}{x-2}>0\Longleftrightarrow x<2$ eller $x>7$.

   Svar: För $x<2$ eller $x>7$

   (b) Uttrycken är definierade då $x>0$, $x-1>0$ och $8-3x>0$, dvs då $1<x<8/3$. För dessa x fås att $\ln x+\ln(x-1)=\ln(x(x-1))=\ln(8-3x)\Longleftrightarrow$

   $\Longleftrightarrow\Big/\text{ln strängt växande}\Big/\Longleftrightarrow x^2-x=8-3x\Longleftrightarrow(x+4)(x-2)=0$ som endast har lösningen $x=2$ i intervallet.

   Svar: $x=2$

3. (a) Eulers formler ger att $\sin^2 3x\cos 5x=\left(\dfrac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)^2\cdot\dfrac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}=$

   $$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{(e^{i6x}+e^{-i6x}-2)(e^{i5x}+e^{-i5x})}{2}=$$
   $$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i11x}+e^{-i11x}-2(e^{i5x}+e^{-i5x})+e^{ix}+e^{-ix}}{2}=-\frac{\cos 11x-2\cos 5x+\cos x}{4}.$$

   Svar: $\dfrac{2\cos 5x-\cos 11x-\cos x}{4}$

   (b) $4\sin^2 3x\cos 5x=[\text{enligt a)}]=2\cos 5x-\cos 11x-\cos x=\cos 5x-\cos x\Longleftrightarrow$

   $\Longleftrightarrow\cos 5x=\cos 11x\Longleftrightarrow 5x+n2\pi=11x$ eller $5x=-11x+n2\pi\Longleftrightarrow$

   $\Longleftrightarrow x=n\dfrac{\pi}{3}$ eller $x=n\dfrac{\pi}{8}$ där n är ett godtyckligt heltal.

   Svar: $x=n\dfrac{\pi}{3}$ eller $x=n\dfrac{\pi}{8}$ där n är ett godtyckligt heltal

4. (a) $3\cdot 4^x=5\cdot e^x\Longleftrightarrow\left(\dfrac{4}{e}\right)^x=\dfrac{5}{3}\Longleftrightarrow x\ln\dfrac{4}{e}=\ln\dfrac{5}{3}\Longleftrightarrow x=\dfrac{\ln\frac{5}{3}}{\ln\frac{4}{e}}=\dfrac{\ln 5-\ln 3}{\ln 4-1}.$

   Svar: $x=\dfrac{\ln 5-\ln 3}{\ln 4-1}$

   (b) $\sqrt{3-\ln(x+1)}$ är definierad då $3-\ln(x+1)\geq 0\Longleftrightarrow\ln(x+1)\leq 3\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow 0<x+1\leq e^3\Longleftrightarrow -1<x\leq e^3-1$. För dessa x fås $y=\sqrt{3-\ln(x+1)}\Longrightarrow$ $y^2=3-\ln(x+1)\Longleftrightarrow\ln(x+1)=3-y^2\Longleftrightarrow x+1=e^{3-y^2}\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x=e^{3-y^2}-1=f^{-1}(y)$.

   Svar: $D_f=]-1,e^3-1]$, $f^{-1}(x)=e^{3-x^2}-1$

5. (a) En rätvinklig triangel med sidor 3,4,5 visar att $\cos(\arctan 43) = \dfrac{3}{5}$.

Svar: $\dfrac{3}{5}$

(b) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{12}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x\right) = \Big/ \cos\varphi = \sqrt{3}/2, \sin\varphi = -1/2$ ger t.ex. $\varphi = -\pi/6 \Big/ = \sqrt{12}(\sin x\cos(-\pi/6) + \cos x\sin(-\pi/6)) =$

$= \sqrt{12}\sin(x - \pi/6)$.

Svar: $\sqrt{12}\sin(x - \pi/6)$

6. $(z+i)^7 = (z-i)^7 \iff \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^7 = 1$, $z \neq i$. Sätt $w = \dfrac{z+i}{z-i}$. $w^7 = 1 = 1e^{i\cdot 0} \iff w = \sqrt[7]{1}\cdot e^{2n\pi i/7} = e^{2n\pi i/7}, n = 0, 1, \ldots, 6$. $w = \dfrac{z+i}{z-i} \iff w(z-i) = z+i \iff z(w-1) = i(w+1) \iff z = \dfrac{i(w+1)}{w-1}$ $w \neq 1$. Alltså är $z = \dfrac{i(e^{2n\pi i/7}+1)}{e^{2n\pi i/7}-1}$, $n = 1, 2, \ldots, 6$.

Svar: $z = \dfrac{i(e^{2n\pi i/7}+1)}{e^{2n\pi i/7}-1}$, $n = 1, 2, \ldots, 6$

7. $2\arcsin x - \arccos 2x = 0 \iff 2\arcsin x = \arccos 2x$. För att uttrycken skall vara definierade måste $-1/2 \le x \le 1/2$ gälla. Vidare gäller att $\arcsin x$ växer från $-\pi/6$ till $\pi/6$ på $[-1/2, 1/2]$ medan $\arccos 2x$ avtar från π till 0. Härav inses att exakt en lösning existerar.

$2\arcsin x = \arccos 2x \Rightarrow \cos(2\arcsin x) = \cos(\arccos 2x) \iff \Big/ \cos(2v) = 1 - 2\sin^2 v \Big/ \iff$

$\iff 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 2x \iff 2x^2 + 2x - 1 = 2((x+1/2)^2 - \dfrac{3}{4}) =$

$= 2(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2})(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}) = 0 \iff x = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ eller $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Eftersom $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < -1$ måste $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ vara lösningen.

Svar: $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$