Dugga 2 i TATA68, 2011-10-19, lösningsförslag

1. (a) $3x+\sqrt{5-12x}=2 \iff \sqrt{5-12x}=2-3x \Longrightarrow 5-12x=(2-3x)^2=$
$=9x^2-12x+4 \iff 9x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{3}$. Eftersom det ej är ekvivalens hela vägen så MÅSTE vi kontrollera.

- $x=\frac{1}{3}$: $V.L.=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+\sqrt{5-12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}=1+\sqrt{1}=2=H.L.$
- $x=-\frac{1}{3}$: $V.L.=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{5-12\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=-1+\sqrt{9}=-1+3=2=H.L.$

Således är både $x=\frac{1}{3}$ och $x=-\frac{1}{3}$ lösningar till ekvationen.

(Alternativt ser man till att ha ekvivalens i alla steg, genom att ha med villkoret $2-3x\geq 0$ vid kvadreringen.)

Svar: $x=\frac{1}{3}$ eller $x=-\frac{1}{3}$

(b) $\sum_{k=-2}^{313}3^{-k}=\sum_{k=-2}^{313}\left(\frac{1}{3}\right)^k$ är en geometrisk summa med kvot $q=\frac{1}{3}$, första term $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$ och 316 termer (där $316=313-(-2)+1$).

Således är $\sum_{k=-2}^{313}3^{-k}=9\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{316}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3^{316}}\right)$.

Svar: $\frac{27}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3^{316}}\right)$

2. (a) Logaritmerna är definierade då $x+3>0$, $x+4>0$ och $x+1>0$, dvs då $x>-1$. För dessa x fås att
$\ln(x+3)-\ln(x+4)=\ln(x+1) \iff \ln(x+3)=\ln(x+4)+\ln(x+1)=$
$=\ln((x+4)(x+1))=\ln(x^2+5x+4) \iff$ /ln är strängt växande/ $\iff$
$x+3=x^2+5x+4 \iff x^2+4x+1=0 \iff x=-2\pm\sqrt{4-1}=-2\pm\sqrt{3}$.
Av dessa kandidater är det endast $x=-2+\sqrt{3}$ som uppfyller villkoret $x>-1$.

Svar: $x=\sqrt{3}-2$

(b) $z=e^{i\pi/3}+\frac{1}{3-i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}+\frac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i=$
$=\frac{4}{5}+\frac{1+5\sqrt{3}}{10}i$ vilket ger $\bar{z}=\frac{4}{5}-\frac{1+5\sqrt{3}}{10}i$.

Svar: $\bar{z}=\frac{4}{5}-\frac{1+5\sqrt{3}}{10}i$

3. (a) Användning av Euler formler ger $\cos 9x\,\cos 2x=\cos 4x\,\cos 7x \iff$

$$\iff \frac{e^{9ix}+e^{-9ix}}{2}\cdot\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}\cdot\frac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2} \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{11ix}+e^{-11ix}}{2}+\frac{e^{7ix}+e^{-7ix}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^{11ix}+e^{-11ix}}{2}+\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right) \iff$$

$$\frac{1}{2}(\cos 11x+\cos 7x)=\frac{1}{2}(\cos 11x+\cos 3x) \iff \cos 7x=\cos 3x \iff$$

$\iff 7x=\pm 3x+2n\pi$, dvs $x=\frac{n\pi}{2}$ eller $x=\frac{n\pi}{5}$, där n är godtyckligt heltal.

Svar: $x=\frac{n\pi}{2}$ eller $x=\frac{n\pi}{5}$, där n är godtyckligt heltal

(b) Eftersom $5 > 0$ så är $0 < \arctan 5 < \dfrac{\pi}{2}$ och därmed kan $\alpha = \arctan 5$ illustreras i en rätvinklig triangel med kateter 5 och 1 och hypotenusa $\sqrt{26}$ (**gör det!**). Ur detta fås att $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Svar: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

4. (a) $\dfrac{4^x + 2^x - 5}{2^x - 4} > 1 \iff \Big/ t = 2^x > 0 \Big/ \iff \dfrac{t^2 + t - 5}{t - 4} > 1 \iff$
$\iff \dfrac{t^2 + t - 5 - (t-4)}{t-4} > 0 \iff \dfrac{t^2 - 1}{t - 4} > 0 \iff \dfrac{(t-1)(t+1)}{t-4} > 0.$
Vi får följande teckentabell, för $t > 0$:

t	0		1		4	
$t-1$	$\times$	$-$	0	$+$		$+$
$t+1$	$\times$	$+$		$+$		$+$
$t-4$	$\times$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{(t-1)(t+1)}{t-4}$	$\times$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Olikheten gäller alltså då $0 < t < 1$ eller $t > 4$ och eftersom $t = 2^x$ får vi villkoret $0 < 2^x < 1$ eller $2^x > 4 = 2^2$ dvs $x < 0$ eller $x > 2$ (eftersom 2^x är strängt växande).

Svar: $x < 0$ eller $x > 2$

(b) $e^{t+\ln 6} + 1 = e^{-t} \iff e^t \cdot e^{\ln 6} + 1 = \dfrac{1}{e^t} \iff 6\,e^t + 1 = \dfrac{1}{e^t} \iff 6\left(e^t\right)^2 + e^t = 1 \iff$
$\iff \Big/ y = e^t > 0 \Big/ \iff 6y^2 + y - 1 = 0 \iff y^2 + \dfrac{1}{6}y - \dfrac{1}{6} = 0 \iff$
$\iff y = -\dfrac{1}{12} \pm \sqrt{\dfrac{1}{144} + \dfrac{24}{144}} = -\dfrac{1}{12} \pm \dfrac{5}{12}$, dvs $y = \dfrac{1}{3}$ (eller $y = -\dfrac{1}{2}$, men $y > 0$).
Således är $e^t = \dfrac{1}{3}$ dvs $t = \ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3$.

Svar: $t = -\ln 3$

5. Låt $z + i - 2 = re^{iv}$ där $r \geq 0$ och skriv högerledet på polär form, $8i\sqrt{3} - 8 =$
$= 16\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16e^{2\pi i/3}$ så fås $\left(re^{iv}\right)^4 = 16e^{2\pi i/3} \iff r^4\, e^{4iv} = 16e^{2\pi i/3} \iff$

$$\iff \begin{cases} \text{(Abs): } r^4 = 16 \\ \text{(Arg): } 4v = \dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 16^{1/4} = 2 \\ v = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{2} \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Således fås alla z som $z = 2 - i + re^{iv} = 2 - i + 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}\right)}$ där $n = 0, 1, 2, 3$ vilket ger lösningarna

$z_1 = 2 - i + 2e^{i\pi/6} = 2 - i + \sqrt{3} + i = 2 + \sqrt{3}$
$z_2 = 2 - i + 2e^{i\pi/6 + i\pi/2} = 2 - i + i(\sqrt{3} + i) = 1 + (\sqrt{3} - 1)i$
$z_3 = 2 - i + 2e^{i\pi/6 + i\pi} = 2 - i - (\sqrt{3} + i) = 2 - \sqrt{3} - 2i$
$z_3 = 2 - i + 2e^{i\pi/6 + i3\pi/2} = 2 - i - i(\sqrt{3} + i) = 3 - (\sqrt{3} + 1)i.$

Svar: $z = 2 + \sqrt{3}$, $z = 1 + (\sqrt{3} - 1)i$, $z = 2 - \sqrt{3} - 2i$ eller $z = 3 - (\sqrt{3} + 1)i$

6. $f(x)$ är definierad då $\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right) \geq 1 \iff \Big/\text{ln är strängt växande}\Big/ \iff$

$\iff \dfrac{x-3}{x-1} \geq e \iff \dfrac{x-3-e(x-1)}{x-1} \geq 0 \iff \dfrac{(1-e)x-(3-e)}{x-1} \geq 0 \iff$

$\iff \dfrac{(e-1)x+(3-e)}{x-1} \leq 0 \iff \Big/\text{eftersom } e-1>0\Big/ \iff \dfrac{x+\frac{3-e}{e-1}}{x-1} \leq 0.$

Av detta får vi teckentabellen

x		$-\dfrac{3-e}{e-1}$		1	
$x+\dfrac{3-e}{e-1}$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x+\frac{3-e}{e-1}}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

vilket visar att $f(x)$ är definierad då $-\dfrac{3-e}{e-1} \leq x < 1$.

För dessa x fås att $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)-1} \implies y^2 = \ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right) - 1 \iff$

$\iff \ln\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right) = y^2+1 \iff \Big/\text{ty exp är invers till ln}\Big/ \iff$

$\iff \dfrac{x-3}{x-1} = e^{y^2+1} \iff e^{y^2+1}(x-1) = x-3 \iff x\left(e^{y^2+1}-1\right) = e^{y^2+1}-3 \iff$

$\iff x = \dfrac{e^{y^2+1}-3}{e^{y^2+1}-1} = f^{-1}(y)$ eftersom x är entydigt bestämt av y.

Svar: $D_f = \left[-\dfrac{3-e}{e-1}\,,\,1\right[\ ,\ f^{-1}(x) = \dfrac{e^{x^2+1}-3}{e^{x^2+1}-1}$

7. $\begin{cases} x^{10}\cos 10y + 2\sqrt{2}\,x^5\cos 5y + 3 = 0 \\ x^{10}\sin 10y + 2\sqrt{2}\,x^5\sin 5y + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \iff$

$\iff x^{10}\cos 10y + 2\sqrt{2}\,x^5\cos 5y + 3 + i\left(x^{10}\sin 10y + 2\sqrt{2}\,x^5\sin 5y + \sqrt{3}\right) = 0 \iff$

$\iff x^{10}(\cos 10y + i\sin 10y) + 2\sqrt{2}\,x^5(\cos 5y + i\sin 5y) + 3 + i\sqrt{3} = 0 \iff$

$\iff x^{10}e^{10iy} + 2\sqrt{2}\,x^5e^{5iy} + 3 + i\sqrt{3} = 0 \iff \left(x\,e^{iy}\right)^{10} + 2\sqrt{2}\left(x\,e^{iy}\right)^5 + 3 + i\sqrt{3} = 0.$

Låt $z = x\,e^{iy}$ så fås ekvationen

$$z^{10} + 2\sqrt{2}\,z^5 + 3 + i\sqrt{3} = 0 \iff \left(z^5+\sqrt{2}\right)^2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Sätt $z^5 + \sqrt{2} = a + ib$ där a och b är reella, så fås ekvationen

$(a+ib)^2 = -1 - i\sqrt{3} \iff a^2 - b^2 + 2abi = -1 - i\sqrt{3}.$

Identifiering av realdel, imaginärdel och belopp ger ekvationerna

$$\begin{cases} \text{(Re): } a^2 - b^2 = -1 \\ \text{(Im): } 2ab = -\sqrt{3} \\ \text{(Abs): } a^2 + b^2 = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \end{cases}$$

vilket ger lösningarna $(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ eller $(a, b) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

- $z^5 + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \iff z^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, e^{4\pi i/3} \iff x^5\, e^{5iy} = \sqrt{2}\, e^{4\pi i/3}$.

  Vänsterledet skrivet på polär form är $x^5\, e^{5iy} = \begin{cases} x^5 e^{5iy} & , \quad \text{om } x \geq 0 \\ -x^5 e^{i(5y+\pi)} & , \quad \text{om } x < 0 \end{cases}$

  och genom att identifiera absolutbelopp och argument så får vi, på motsvarande sätt som i uppgift 5, att

  $$\begin{cases} x^5 = \sqrt{2}\,, \ x \geq 0 \\ 5y = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt[10]{2} \\ y = \frac{4\pi}{15} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases}$$

  eller

  $$\begin{cases} -x^5 = \sqrt{2}\,, \ x < 0 \\ 5y + \pi = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\sqrt[10]{2} \\ y = \frac{\pi}{15} + \frac{2n\pi}{5}. \end{cases}$$

- $z^5 + \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \iff z^5 = -\frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}\, e^{5\pi i/6}$ ger med motsvarande resonemang

  $$\begin{cases} x = \sqrt[10]{6} \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} x = -\sqrt[10]{6} \\ y = -\frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5}. \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} x = \sqrt[10]{2} \\ y = \frac{4\pi}{15} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases}, \begin{cases} x = -\sqrt[10]{2} \\ y = \frac{\pi}{15} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt[10]{6} \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases}, \begin{cases} x = -\sqrt[10]{6} \\ y = -\frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5} \end{cases}$

där n är heltal