Dugga 2 i TATM79, 2012-10-20, lösningsförslag

1. (a) $f(x) = 0 \iff 2x + \sqrt{x^2+x+2} = 0 \iff \sqrt{x^2+x+2} = -2x \iff$
$\begin{cases} x^2+x+2 = (-2x)^2 \\ x \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - x - 2 = 0 \\ x \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{3} = 0 \\ x \le 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{25}{36} \\ x \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{6} \pm \dfrac{5}{6} \\ x \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ eller } x = -\dfrac{2}{3} \\ x \le 0 \end{cases} \iff$
$x = -\dfrac{2}{3}$.
Alt: Har vi inte med villkoret $x \le 0$ så får vi implikation vid kvadreringen. Då **måste** lösningskandidaterna $x = 1$ och $x = -\dfrac{2}{3}$ kontrolleras i ursprungsekvationen.

Svar: $x = -\dfrac{2}{3}$.

(b) $e^3 \cdot e^5 \cdot e^7 \cdot \ldots \cdot e^{119} \cdot e^{121} = e^{3+5+7+\ldots+119+121}$. Vi ser att $3+5+7+\ldots+119+121 = \sum_{k=0}^{n}(3+2k)$ där $3+2n = 121$ dvs $n = 59$. $\sum_{k=0}^{59}(3+2k)$ är en aritmetisk summa med första term $= 3$, sista term $= 121$ och med 60 termer. Alltså är summan lika med $\dfrac{3+121}{2} \cdot 60 = 3720$, så $e^3 \cdot e^5 \cdot e^7 \cdot \ldots \cdot e^{119} \cdot e^{121} = e^{3720}$.

Svar: e^{3720}.

2. (a) Logaritmerna är definierade förutsatt att $1-2x > 0$, $x+3 > 0$ och $x + \dfrac{1}{3} > 0$, dvs då $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$. För dessa x fås $2\ln(1-2x) - \ln(x+3) = \ln\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \iff$
$2\ln(1-2x) = \ln(x+3) + \ln\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \iff \ln(1-2x)^2 = \ln\left((x+3)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\right) \iff$
$\Big/ \text{ln är injektiv} \Big/ \iff (1-2x)^2 = (x+3)\left(x+\dfrac{1}{3}\right) \iff 3x^2 - \dfrac{22}{3}x = 0 \iff$
$3x\left(x - \dfrac{22}{9}\right) = 0 \iff x = 0$ eller $x = \dfrac{22}{9}$, men av dessa är det endast $x = 0$ som uppfyller villkoret $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}$.

Svar: $x = 0$.

(b) $3\left(e^x - e^{-x}\right) = 8 \iff 3\left((e^x)^2 - 1\right) = 8e^x$. Med $t = e^x > 0$ fås ekvationen
$3\left(t^2-1\right) = 8t \iff t^2 - \dfrac{8}{3}t - 1 = 0 \iff \left(t - \dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9} \iff t = \dfrac{4}{3} \pm \dfrac{5}{3} \iff$
$t = 3$ eller $t = -\dfrac{1}{3}$, men eftersom $t > 0$ så fås att $e^x = t = 3$ dvs $x = \ln 3$.

Svar: $x = \ln 3$.

3. (a) Eftersom $0 < \dfrac{3}{4} < 1$ så är $0 < \arcsin\dfrac{3}{4} < \dfrac{\pi}{2}$, och därmed kan $\arcsin\dfrac{3}{4}$ illustreras i en rätvinklig triangel med motstående katet $= 3$, hypotenusa $= 4$ och närliggande katet $= \sqrt{4^2-3^2} = \sqrt{7}$ (**gör det!**). Alltså är $\tan\left(\arcsin\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

Svar: $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

(b) $\sin x = \sin(1-2x) \iff \begin{cases} x = 1-2x+n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi-(1-2x)+n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 1+n2\pi \\ \text{eller} \\ -x = \pi-1+n2\pi \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}+\dfrac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = 1-\pi-n2\pi \end{cases}$ där n är heltal. Svar: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}+\dfrac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = 1-\pi+n2\pi \end{cases}$, n heltal

(c) Eftersom $-1 \le \dfrac{1}{4} \le 1$ så är $\sin\alpha = \dfrac{1}{4} \iff \begin{cases} \alpha = \arcsin\dfrac{1}{4}+n2\pi \\ \text{eller} \\ \alpha = \pi-\arcsin\dfrac{1}{4}+n2\pi \end{cases}$ där n är ett godtyckligt heltal, och eftersom $0 < \arcsin\dfrac{1}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ (ty $0 < \dfrac{1}{4} < 1$) är det endast $\alpha = \pi-\arcsin\dfrac{1}{4}$ som uppfyller villkoret $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Svar: $\alpha = \pi-\arcsin\dfrac{1}{4}$.

4. (a) Med $z = x+iy$, där x och y är reella, fås $|z-2| = |z+2i| \iff \Big/$ ty båda led är $\ge 0 \Big/ \iff$ $|z-2|^2 = |z+2i|^2 \iff |x+iy-2|^2 = |x+iy+2i|^2 \iff |(x-2)+iy|^2 = |x+i(y+2)|^2 \iff (x-2)^2+y^2 = x^2+(y+2)^2 \iff -4x = 4y \iff y = -x$ där x är godtyckligt, dvs detta beskriver den räta linjen $y = -x$ i det komplexa talplanet (linjen som bl.a. går genom origo och punkten $z = 1-i$).

Alt: Eftersom $|z-a|$ anger avståndet mellan z och a så beskriver sambandet $|z-2| = |z+2i|$ alla punkter z som har samma avstånd till 2 och till $-2i$, dvs mittpunktsnormalen till sträckan mellan 2 och $-2i$.

Svar: Linjen $y = -x$ (där $z = x+iy$).

(b) Skriv talen på på polär form. Med $z = re^{iv}$, där $r \ge 0$ och v är reellt, och $1-i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\pi/3}$ fås $z^3 = 1-i\sqrt{3} \iff \left(re^{iv}\right)^3 = 2e^{-i\pi/3} \iff$ $r^3e^{i3v} = 2e^{-i\pi/3} \iff \begin{cases} r^3 = 2,\ r \ge 0 \\ 3v = -\dfrac{\pi}{3}+n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ v = -\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{n2\pi}{3} \end{cases}$ dvs $z = \sqrt[3]{2}\,e^{\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{n2\pi}{3}\right)i}$, där $n = 0,\ 1,\ 2$ ger de tre olika rötterna till tredjegradsekvationen.

Svar: $z = \sqrt[3]{2}\,e^{\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{n2\pi}{3}\right)i}$, $n = 0,\ 1,\ 2$.

5. (a) Då x är reellt definieras $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

(b) Med hjälp av Eulers formler fås $\sin 3x \sin 5x = \dfrac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\cdot\dfrac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} = \dfrac{e^{8ix}-e^{-2ix}-e^{2ix}+e^{-8ix}}{-4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}-\dfrac{e^{8ix}+e^{-8ix}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$.

Dessutom är $\cos^2 4x = \dfrac{1+\cos 8x}{2}$ (Eulers formler eller dubbla vinkeln). Således får vi att $\sin 3x \sin 5x = -\cos^2 4x \iff \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = -\dfrac{1+\cos 8x}{2} \iff$ $\cos 2x = -1 \iff 2x = \pi+n2\pi \iff x = \dfrac{\pi}{2}+n\pi$ där n är heltal.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{2}+n\pi$ där n är heltal.

6. $f(x)$ är definierad då $\dfrac{2\pi}{3} - \arccos x > 0 \iff \arccos x < \dfrac{2\pi}{3} = \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) \iff$

$\Big/ \arccos x$ definierad då $-1 \le x \le 1$, arccos är strängt avtagande $\Big/ \iff$

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff -\frac{1}{2} < x \le 1.$$

För dessa x fås $y = \ln\left(\dfrac{2\pi}{3} - \arccos x\right) \iff e^y = \dfrac{2\pi}{3} - \arccos x \iff$

$\arccos x = \dfrac{2\pi}{3} - e^y \implies x = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - e^y\right) = f^{-1}(y)$ (eftersom varje y ger högst ett x-värde har vi visat att inversen finns samtidigt som vi funnit ett uttryck för den).

Svar: $D_f = \left\{x : -\dfrac{1}{2} < x \le 1\right\}$, $f^{-1}(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - e^x\right)$.

7. För att $\tan x$ ska vara definierad krävs att $\cos x \neq 0$. För dessa x är $\cos^6 x \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \frac{\tan^k x}{k!(6-k)!} =$

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{\sin^k x \cos^{6-k} x}{k!(6-k)!} = \frac{1}{6!}\sum_{k=0} \frac{6!}{k!(6-k)!}\sin^k x\cos^{6-k} x = \frac{1}{6!}\sum_{k=0}\binom{6}{k}\sin^k x \cos^{6-k} x =$$

$\Big/$ binomialsatsen $\Big/ = \dfrac{1}{6!}(\sin x + \cos x)^6 = \dfrac{1}{6!}\left(\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)^6 = \dfrac{2^3}{6!}\sin^6\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Således är $\cos^6 x \displaystyle\sum_{k=0}^{6}\frac{\tan^k x}{k!(6-k)!} = \frac{3}{640} \iff \frac{2^3}{6!}\sin^6\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{640} \iff$

$\sin^6\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3 \cdot 6!}{2^3 \cdot 640} = \dfrac{3^3}{2^6} \iff \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{3} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{12} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + n2\pi \end{cases}$
- $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{3} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{7\pi}{12} + n2\pi \\ \text{eller} \\ x = \dfrac{13\pi}{12} + n2\pi \end{cases}$

Inget av dessa x ger $\cos x = 0$, dvs samtliga är lösningar till ekvationen. Dessutom är lösningarna till den andra ekvationen förskjutna π i förhållande till lösningarna till första ekvationen, så vi kan skriva lösningarna på en enklare form.

Svar: $x = \dfrac{\pi}{12} + n\pi$ eller $x = \dfrac{5\pi}{12} + n\pi$, n heltal.