Tentamen i TATA68, 2014-08-19 lösningsförslag

1. (a) Beloppet kan hanteras med falluppdelning. $|1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{om } x \leq 1 \\ x-1, & \text{om } x \geq 1. \end{cases}$

   - $x \leq 1$ ger ekvationen $3x + (1-x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$, som uppfyller villkoret $x \leq 1$.
   - $x \geq 1$ ger ekvationen $3x + x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{4}$ som inte uppfyller villkoret $x \geq 1$.

   (Alt: Redan från början syns att x måste vara negativ för att vänsterledet ska kunna bli 0, och för $x < 0$ kan ekvationen skrivas $3x + (1-x) = 0$.)

   Svar: $x = -1/2$.

   (b) Detta är en geometrisk summa med första term$= 3 \cdot 2^2 = 12$, kvot$= 2$ och antal termer $= 202 - 3 + 1 = 200$. Därmed blir $\sum_{k=3}^{202} 3 \cdot 2^{k-1} = 12 \cdot \frac{2^{200}-1}{2-1} = 12 \cdot \left(2^{200} - 1\right)$.

   Svar: $12 \cdot \left(2^{200} - 1\right)$

   (c) $\sum_{k=1}^{3} \binom{k+5}{k+2} = \binom{6}{3} + \binom{7}{4} + \binom{8}{5} = \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \binom{8}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} =$
   $5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 = 20 + 35 + 56 = 111$.

   Svar: 111.

2. Logaritmerna är definierade då $2 - x > 0$, $x > 0$ och $x + 4 > 0$, dvs då $0 < x < 2$. För dessa x fås $\ln(2-x) - 2\ln x = \ln(x+4) \iff \ln(2-x) = \ln x^2 + \ln(x+4) \iff \ln(2-x) = \ln\left(x^2(x+4)\right) \iff \Big/ \text{ln är injektiv} \Big/ \iff 2 - x = x^2(x+4) \iff x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$. Vi ser att $x = -1$ är en lösning till denna ekvation, och polynomdivision ger $x^3 + 4x^2 + x - 2 = (x+1)(x^2 + 3x - 2)$ och slutligen fås $x^2 + 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

   De tre kandidaterna -1, $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$ måste sedan kontrolleras mot villkoret $0 < x < 2$, och vi ser att endast $\frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$ uppfyller villkoret (använd att $4 < \sqrt{17} < 5$).

   Svar: $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$.

3. (a) En cirkel med medelpunkt $(2, -1)$ har ekvationen $(x-2)^2+(y+1)^2 = r^2$. Cirkeln ska gå genom origo, så $(x, y) = (0, 0)$ ska uppfylla ekvationen. Således är $r^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$, dvs cirkelns ekvation är $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$.

Linjen genom punkterna $(-1, -3)$ och $(2, 3)$ har ekvationen $y-3 = \dfrac{3-(-3)}{2-(-1)}(x-2) \iff$ $y = 2x-1$.

Skärningspunkterna fås ur ekvationssystemet $\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2 = 5\\ y = 2x-1\end{cases} \iff$

$$\begin{cases}(x-2)^2+(2x)^2 = 5\\ y = 2x-1\end{cases} \iff \begin{cases}5x^2-4x-1 = 0\\ y = 2x-1\end{cases} \iff \begin{cases}x = 1 \text{ eller } x = -1/5\\ y = 2x-1\end{cases} \iff$$

$(x, y) = (1, 1)$ eller $(x, y) = (-1/5, -7/5)$.

Svar: Skärningspunkterna är $(1, 1)$ och $(-1/5, -7/5)$.

(b) $z = i\sqrt{3} - 3 = \Big/ \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Big/ = 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right)$. Vi söker en vinkel v sådan att $\begin{cases}\cos v = -\sqrt{3}/2\\ \sin v = 1/2\end{cases}$ och vi ser att t.ex. $v = 5\pi/6$ uppfyller detta (samtliga lösningar är $v = 5\pi/6 + 2n\pi$). Alltså är $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) =$ $2\sqrt{3}\cdot e^{5\pi i/6}$

Svar: $2\sqrt{3}\cdot e^{5\pi i/6}$.

4. f är definierad då $\dfrac{1-x}{x-2} \geq 0 \iff \Big/$t.ex. teckentabell på vanligt sätt$\Big/ \iff 1 \leq x < 2$.

För dessa x fås $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x-2}} \implies y^2 = \dfrac{1-x}{x-2} \iff y^2(x-2) = 1-x \iff x(1+y^2) =$ $1+2y^2 \iff x = \dfrac{1+2y^2}{1+y^2}$. Eftersom varje y ger högst ett x-värde, har vi visat att inversen finns och att $f^{-1}(y) = \dfrac{1+2y^2}{1+y^2}$.

Svar: $D_f = \{x : 1 \leq x < 2\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1+2x^2}{1+x^2}$.

5. $$\cos x \sin^2 x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}-e^{ix}-e^{-ix}}{-8} =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} - \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) = -\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x).$$

Med hjälp av denna omskrivning fås att

$$4\cos x \sin^2 x = \sin x + \cos x \iff -\cos 3x + \cos x = \sin x + \cos x \iff \cos 3x = -\sin x \iff$$

$$\cos 3x = \sin(-x) \iff \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \iff \begin{cases}3x = \dfrac{\pi}{2} + x + 2n\pi\\ \text{eller}\\ 3x = -\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) + 2n\pi\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi\\ \text{eller}\\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}\end{cases} \quad \text{där } n \text{ är godtyckligt heltal.}$$

Svar: $\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi\\ \text{eller}\\ x = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{n\pi}{2}\end{cases}$ där n är godtyckligt heltal.

6. Låt $v = \arctan 3 + \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Först gör vi några uppskattningar:

- $0 < \arctan 3 < \dfrac{\pi}{2}$, eftersom $3 > 0$
- $\dfrac{\pi}{2} < \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) < \pi$, eftersom $-1 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 0$.

Härav följer att $\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{3\pi}{2}$.

Tittar vi därefter på tangens för vinkeln så fås

$$\tan v = \frac{\tan(\arctan 3) + \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{1 - \tan(\arctan 3)\cdot\tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} =$$

$$= \Big/ \tan(\arctan 3) = 3\,,\ \tan\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} =$$

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)}}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{4}{5}}}{\frac{-2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2},$$

där vi utnyttjat att $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) > 0$ eftersom $\dfrac{\pi}{2} < \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) < \pi \Big/ =$

$$= \frac{3-\frac{1}{2}}{1-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1.$$

Av detta drar vi slutsatsen att $v = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$ för något heltal n, och eftersom $\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{3\pi}{2}$ så följer att enda möjligheten är att $v = \dfrac{5\pi}{4}$.

Svar: $v = \dfrac{5\pi}{4}$.

7. Vänstra olikheten följer av följande resonemang.

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(k^2+k+1\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k^2+k+1) - \ln(k^2+k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2+k}\right) <$$

$$< \Big/ x = 1 + \frac{1}{k^2+k} > 1 \text{ och } \ln x < x - 1 \text{ då } x > 0,\ x \neq 1 \Big/ <$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2+k} - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}.$$

Högra olikheten följer av

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

för $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ v.s.v.