Addition av arcus-funktioner: komplex hjälpmetod

Exempel: Förenkla $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Låt $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Låt v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot real-axeln, och v_2 vinkeln z_2 bildar mot real-axeln. Det följer att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{och} \qquad \tan v_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

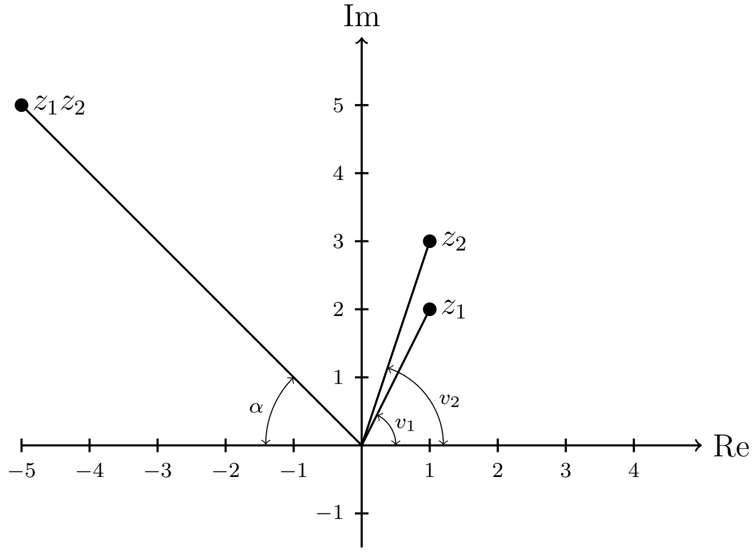
En lösning till respektive ekvation fås genom $v_1 = \arctan 2$ och $v_2 = \arctan 3$. Dessa vinklar ligger i första kvadranten och är de vi söker. Om vi nu skriver z_1 och z_2 på polär form,

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i \arctan 2} \qquad \text{och} \qquad z_2 = \sqrt{10}e^{i \arctan 3},$$

ser vi att $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{i(\arctan 2 + \arctan 3)}$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arctan 3 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 + 3i) = -5 + 5i$. Vi har följande illustration:



Vi ser att $\tan \alpha = 5/5 = 1$, så $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$. Alltså blir $v_3 = \pi - \arctan 1 = 3\pi/4$ vinkeln mellan $z_1 z_2$ och (positiva) real-axeln. Observera att vi inte kan skriva $\arctan(-1)$ eftersom den vinkeln ligger i 4:e kvadranten ($= -\pi/4$). Detta medför att

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ekvationerna (1) och (2) implicerar att

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Heltalet n kommer från $n = k - m$, som kan anta vilket heltal som helst. För att kunna välja det n som är nödvändigt (det finns bara ett korrekt svar) så måste vi uppskatta hur stort talet $\arctan 2 + \arctan 3$ är. Funktionen $\arctan x$ är växande, så

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan alltså se att $\pi/4 + \pi/4 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$, eller

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (3).

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \dfrac{3\pi}{4}$. *OBS: Ett svar!*