# Tentamen i TATA68, 2011-01-11, lösningsförslag

1. (a) $x^2+4x=6y-y^2 \iff x^2+4x+y^2-6y=0 \iff (x+2)^2+(y-3)^2=13=(\sqrt{13})^2$ vilket är en cirkel med medelpunkt $(-2,3)$ och radie $\sqrt{13}$.

   Svar: medelpunkt $(-2,3)$, radie $\sqrt{13}$

   (b) Falluppdelning ger $|2x+3| = \begin{cases} 2x+3 \text{ om } x \geq -\dfrac{3}{2} \\ -2x-3 \text{ om } x \leq -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

   - Om $x \leq -\dfrac{3}{2}$ får vi $-2x-3-x \leq 5 \iff -3x \leq 8 \iff x \geq -\dfrac{8}{3}$ dvs $-\dfrac{8}{3} \leq x \leq -\dfrac{3}{2}$.
   - Om $x \geq -\dfrac{3}{2}$ får vi $2x+3-x \leq 5 \iff x \leq 2$ dvs $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq 2$.

   Svar: $-\dfrac{8}{3} \leq x \leq 2$

2. (a) $3^{x+1}=9^x-10 \iff 3\cdot 3^x=(3^x)^2-10$. Sätt $t=3^x$. Då är $t>0$ och ekvationen blir $t^2-3t-10=0 \iff \left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}=0 \iff \left(t-\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}\right)\left(t-\dfrac{3}{2}+\dfrac{7}{2}\right)=0 \iff (t-5)(t+2)=0 \iff t=5$ (ty $t>0$). Alltså fås $3^x=5$ dvs $x=\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$.

   Svar: $x=\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$

   (b) De båda logaritmerna är definierade då $5-3x>0$ och $5x-7>0$ dvs då $\dfrac{7}{5}<x<\dfrac{5}{3}$. För dessa $x$ är $\ln(5-3x)=\ln(5x-7) \iff 5-3x=5x-7 \iff 8x=12 \iff x=\dfrac{3}{2}$ och eftersom $\dfrac{7}{5}<\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{3}$ så är $x=\dfrac{3}{2}$ enda lösningen till ekvationen.

   Svar: $x=\dfrac{3}{2}$

   (c) De båda logarimerna är definierade då $x>0$. För $x>0$ fås $(\ln x)^2=\ln\dfrac{1}{x^2} \iff (\ln x)^2=-2\ln x \iff (\ln x)^2+2\ln x=0 \iff (2+\ln x)\ln x=0 \iff \ln x=0$ eller $\ln x=-2 \iff x=1$ eller $x=\dfrac{1}{e^2}$, som båda är $>0$.

   Svar: $x=1$ eller $x=\dfrac{1}{e^2}$

3. (a) $\cos 7x+\cos 2x=0 \iff \cos 7x=-\cos 2x \iff \cos 7x=\cos(2x+\pi) \iff 7x=\pm(2x+\pi)+2n\pi \iff x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2n\pi}{5}$ eller $x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2n\pi}{9}$ där $n\in\mathbf{Z}$.

   Svar: $x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2n\pi}{5}$ eller $x=-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2n\pi}{9}$ , $n\in\mathbf{Z}$

   (b) $\sin x=\dfrac{4}{5} \iff \cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=\pm\dfrac{3}{5}$. Dessutom är $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ så $\cos x<0$. Alltså är $\cos x=-\dfrac{3}{5}$.

   Därmed fås $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

   Svar: $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$

   (c) $\mathrm{Im}\left(3e^{i\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\mathrm{Im}\left(3\cos\left(\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+3i\sin\left(\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=3\sin\left(\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=$ $\Big/$ rätvinklig triangel visar att $\sin\left(\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\Big/$ $=\sqrt{3}$.

   Svar: $\sqrt{3}$

4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \Big/$geometrisk summa med första term=kvot$=\frac{1}{2}$ och $n$ termer$\Big/ =$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^n}$ så den högra olikheten är uppfylld för alla positiva heltal $n$.

$\frac{999}{1000} < 1-\frac{1}{2^n} \iff \frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \iff \Big/$båda led positiva$\Big/ \iff 2^n > 1000$ vilket är uppfyllt för alla heltal $n \geq 10$ ty $2^n$ är växande, $2^9 = 512 < 1000$ och $2^{10} = 1024 > 1000$.

Svar: Alla heltal $n \geq 10$

5. Polynomet har reella koefficienter och $z = 1-i$ är ett nollställe. Därmed är även $\bar{z} = 1+i$ ett nollställe till polynomet. Således är $p(z)$ delbart med $(z-(1-i))(z-(1+i)) = z^2-2z+2$. Polynomdivision ger $p(z) = (z^2-2z+2)(z^2+2z+3)$ och $z^2+2z+3 = 0 \iff (z+1)^2+2 = 0 \iff (z+1)^2 = -2 \iff z+1 = \pm i\sqrt{2} \iff z = -1 \pm i\sqrt{2}$.

Svar: $z = 1 \pm i$ eller $z = -1 \pm i\sqrt{2}$

6. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \iff a\cos\frac{\pi}{6} - \frac{1}{a}\sin\frac{\pi}{6} = 0 \iff \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2a} = 0 \iff a^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff$

$\iff \Big/ a > 0 \Big/ \iff a = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. För detta värde på $a$ fås

$$f(x) = a\sqrt{2} \iff a\cos x - \frac{1}{a}\sin x = a\sqrt{2} \iff \cos x - \frac{1}{a^2}\sin x = \sqrt{2} \iff$$

$$\iff \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2} \iff 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = \sqrt{2} \iff$$

$$\iff \sin\frac{5\pi}{6}\cos x + \cos\frac{5\pi}{6}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin\left(x+\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\iff x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ eller } x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2n\pi \iff$$

$$\iff x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi \text{ eller } x = -\frac{\pi}{12} + 2n\pi \text{ där } n \in \mathbf{Z}.$$

Svar: $x = -\frac{7\pi}{12} + 2n\pi$ eller $x = -\frac{\pi}{12} + 2n\pi$ , $n \in \mathbf{Z}$

7. (a) Notera först att $D_f = V_{f^{-1}}$ , $V_f = D_{f^{-1}}$ och motsvarande för $g$. Vi ska hitta det största intervall, som innehåller $t = 0$, där $h(t) = \ln\left(16-(t-3)^2\right)$ är inverterbar. $h(t)$ är definierad då $16-(t-3)^2 > 0 \iff (t-3)^2 < 16 \iff -4 < t-3 < 4 \iff -1 < t < 7$. Det största intervall, som innehåller $t = 0$, där $h$ är inverterbar är $-1 < t \leq 3$ (ty $h(t)$ är jämn kring $t = 3$ och strängt avtagande på $]-1,3]$), således är största möjliga sökta $D_f = V_{f^{-1}} = ]-1,3]$ och då blir $V_g = ]-\infty, \ln 16]$.

Svar: $D_f = ]-1,3]$

(b) $D_f = ]-1,3]$ och $V_f = [-1,1[$ får vi t.ex. genom att välja den linjära funktionen genom punkterna $(-1,1)$ och $(3,-1)$, dvs $y-1 = -\frac{1}{2}(x+1) \iff y = \frac{1-x}{2}$ definierad på det givna intervallet, dvs $f(x) = \frac{1-x}{2}$ , $-1 < x \leq 3$. För detta val av $f$ fås $y = \ln\left(16-\left(f^{-1}(x)-3\right)^2\right) \iff e^y = 16-\left(f^{-1}(x)-3\right)^2 \iff \left(f^{-1}(x)-3\right)^2 = 16-e^y \iff \Big/ f^{-1}(x) \leq 3 \Big/ \iff f^{-1}(x)-3 = -\sqrt{16-e^y} \iff f^{-1}(x) = 3-\sqrt{16-e^y} \iff x = f\left(3-\sqrt{16-e^y}\right) = \frac{1-\left(3-\sqrt{16-e^y}\right)}{2} = \frac{\sqrt{16-e^y}}{2} - 1 = g^{-1}(y)$ med $D_{g^{-1}} = V_g = ]-\infty, \ln 16]$.

Svar: T.ex. $f(x) = \frac{1-x}{2}$ , $-1 < x \leq 3$ , $g^{-1}(x) = \frac{\sqrt{16-e^x}}{2} - 1$ , $x \leq \ln 16$