Tentamen i TATA68, 2012-01-10, lösningsförslag

1. (a) Vi ser att $\dfrac{x}{2}-1 \geq 0$ dvs $x \geq 2$, för att leden ska ha samma tecken. För $x \geq 2$ är $\sqrt{2-x} = \dfrac{x}{2} - 1 \iff 2-x = \left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$ varav endast $x = 2$ uppfyller villkoret $x \geq 2$. Svar: $x = 2$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{101} e^{3k} = \sum_{k=2}^{101} \left(e^3\right)^k = \Big/$geometrisk summa, 100 termer, första term e^6, kvot $e^3\Big/ =$
   $= e^6 \cdot \dfrac{\left(e^3\right)^{100}-1}{e^3-1} = e^6 \cdot \dfrac{e^{300}-1}{e^3-1}$. Svar: $e^6 \cdot \dfrac{e^{300}-1}{e^3-1}$

2. (a) $$\frac{\ln\left(e^{2\ln 2}\cdot\left(\ln\frac{1}{e^2}\right)^2\right)}{\ln\left[e^{-\ln 2}+\ln\left(\left(\sqrt{e}\right)^3\right)\right]} = \frac{\ln\left(e^{\ln 2^2}\cdot\left(\ln(e^{-2})\right)^2\right)}{\ln\left(e^{\ln(1/2)}+\ln(e^{3/2})\right)} = \frac{\ln(2^2\cdot(-2)^2)}{\ln(1/2+3/2)} = \frac{\ln 16}{\ln 2} =$$
   $= \dfrac{\ln 2^4}{\ln 2} = \dfrac{4\ln 2}{\ln 2} = 4$ Svar: $x = 4$

   (b) Logaritmerna är definierade då $2-x > 0$, $2+x > 0$ och $1-2x > 0$, dvs då $-2 < x < 1/2$. För dessa x är
   $\ln(2-x) = \ln(2+x) - \ln(1-2x) \iff \ln(2-x) + \ln(1-2x) = \ln(2+x) \iff$
   $\iff (2-x)(1-2x) = 2+x \iff 2x^2 - 6x = 0 \iff 2x(x-3) = 0 \iff$
   $\iff x = 0$ eller $x = 3$, varav endast $x = 0$ uppfyller villkoret $-2 < x < 1/2$.
   Svar: $x = 0$

3. (a) $\tan\left(5x+\dfrac{\pi}{5}\right) = \tan 8x \iff \Big/$om $8x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\Big/ \iff 5x + \dfrac{\pi}{5} = 8x + n\pi \iff$ $3x = \dfrac{\pi}{5} - n\pi \iff x = \dfrac{\pi}{15} - \dfrac{n\pi}{3}$ där n är heltal. Alla dessa x ger $8x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (kontrollera). Svar: $x = \dfrac{\pi}{15} - \dfrac{n\pi}{3}$ där n är heltal

   (b) Beloppet föranleder falluppdelning, $|x| = \begin{cases} x & , \text{ om } x \geq 0 \\ -x & , \text{ om } x \leq 0. \end{cases}$
   För $x \geq 0$ fås ekvationen $2e^x = 4 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$ som uppfyller villkoret $x \geq 0$.
   För $x \leq 0$ fås ekvationen $e^{-x} + e^x = 4 \iff (e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0 \iff e^x = 2 \pm \sqrt{3}$.
   $x = 2 + \sqrt{3} > 1$ ger $x = \ln(2+\sqrt{3}) > 0$.
   $x = 2 - \sqrt{3} \in]0,1[$ ger $x = \ln(2-\sqrt{3}) < 0$.
   Svar: $x = \ln 2$ eller $x = \ln(2-\sqrt{3})$

4. $z^4 + 8(1+i\sqrt{3}) = 0 \iff z^4 = -8(1+i\sqrt{3}) = 16\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{4\pi i/3}$. Med $z = re^{iv}$ fås $z^4 = 16e^{4\pi i/3} \iff \left(re^{iv}\right)^4 = 16e^{4\pi i/3} \iff r^4e^{4iv} = 16e^{4\pi i/3}$.

   Identifiering av beloppet ger $r^4 = 16 \iff r = 2$ (ty $r \geq 0$), identifiering av argumentet ger $4v = 4\pi/3 + 2n\pi \iff v = \pi/3 + n\pi/2$. Således är $z = 2e^{(\pi/3+n\pi/2)i}$ där $n = 0,1,2,3$. Eftersom den polära framställningen ger standardvinklar, förenklar vi genom att skriva talen på rektangulär form och får

   $z_1 = 2e^{\pi i/3} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 2e^{\pi i/3 + \pi i/2} = iz_1 = i(1+i\sqrt{3}) = i - \sqrt{3}$,
   $z_3 = 2e^{\pi i/3 + \pi i} = -z_1 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_4 = 2e^{\pi i/3 + 3\pi i/2} = -z_2 = \sqrt{3} - i$
   Svar: $z = \pm(1+i\sqrt{3})$, $z = \pm(\sqrt{3}-i)$

5. $\sqrt{3}\cos 3v - \sin 3v = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3v - \frac{1}{2}\sin 3v\right) = 2\left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos 3v + \cos\frac{2\pi}{3}\sin 3v\right) =$

$= 2\sin\left(3v + \frac{2\pi}{3}\right)$. Därmed fås

$$\sqrt{3}\cos 3v - \sin 3v = 1 \iff 2\sin\left(3v + \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \iff \sin\left(3v + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \iff$$
$$\iff 3v + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \text{ eller } 3v + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi \iff$$
$$\iff 3v = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ eller } 3v = \frac{\pi}{6} + 2n\pi \iff v = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3} \text{ eller } v = \frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3} \text{ där}$$
n är heltal.

Svar: $v = -\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}$ eller $v = \frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}$ där n är heltal

6. Eftersom $-\frac{\pi}{2} < \arctan(-\sqrt{2}) < 0$ och $\frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) < \pi$ så är $-\frac{3\pi}{2} < u < -\frac{\pi}{2}$.
Dessutom är $\tan(\arctan(-\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$ och $\tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{\cos\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} =$

$= \frac{\sqrt{8}/3}{-1/3} = -\sqrt{8}$, eftersom $t = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ ger $\sin t > 0$ och därmed

$\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{\sqrt{8}}{3}$. Således är

$\tan u = \frac{\tan(\arctan(-\sqrt{2})) - \tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}{1 + \tan(\arctan(-\sqrt{2}))\cdot\tan\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$, dvs

$u = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) + n\pi$ för något heltal n. Endast $n = -1$ ger en vinkel i intervallet

$\left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$, eftersom $0 < \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$.

Svar: $u = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) - \pi$

7. (a) Binomialsatsen ger $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ vilket skulle visas.

(b) Binomialsatsen ger $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tan^{2k}x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\tan^2 x\right)^k\cdot 1^{n-k} = \left(1+\tan^2 x\right)^n =$

$= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^n$. Således är $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tan^{2k}x = (2n)^n \iff \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^n = (2n)^n \iff$

$$\iff \left(\cos^2 x\right)^n = \left(\frac{1}{2n}\right)^n \iff \Big/ \text{eftersom } \cos^2 x \geq 0 \Big/ \iff \cos^2 x = \frac{1}{2n} \iff$$
$$\iff \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}} \iff \Big/ \text{eftersom } -1 \leq \pm\frac{1}{\sqrt{2n}} \leq 1 \Big/ \iff$$
$$\iff x = \pm\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + 2m\pi \text{ där } m \text{ är heltal.}$$

Svar: $x = \pm\arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + 2m\pi$ där m är heltal