LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN3

Tentamen i Matematisk grundkurs 2013-08-19 kl 8-13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng[1] till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9.

För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är $|x| + |2 - x| = 3$? (2 p)
   (b) I en aritmetisk summa med 200 termer är första termen 500 och den femte 476. Beräkna summan. (1 p)
2. (a) Lös ekvationen $\ln(x+2) = \ln(4-2x) - \ln(5-x)$. (2 p)
   (b) Vilka reella x uppfyller sambandet $2e^x = 2^x$? (1 p)
3. (a) Beräkna $\operatorname{Im}\left(\frac{25}{3+4i}e^{ix}\right)$ för $x \in \mathbf{R}$. (1 p)
   (b) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $4z^2 - 16iz - 13 - 4i = 0$. (2 p)
4. (a) För vilka x är $\sin x = \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$? (1 p)
   (b) Bestäm $\tan x$ om man vet att $\sin x = \frac{1}{3}$ och att $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. (1 p)
   (c) Beräkna $\cos\left(2\arctan\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$. (1 p)
5. Lös ekvationen $\sqrt{3}\cos \pi x - \sin \pi x = \sqrt{2}$.
6. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \sqrt{\frac{2e^x - 1}{e^x - 3}}$.
7. För vilka x gäller sambandet $\arctan x + \arctan(x+1) = \arctan\frac{2x+1}{1-x-x^2}$?

[1] Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Minst 6 poäng på dugga 2 ger 2 bonuspoäng, godkänd dugga 2 ger ytterligare 2 bonuspoäng, d v s godkänd dugga 2 ger totalt 4 bonuspoäng.

Tentamen i TATM79, 2013-08-19 lösningsförslag

1. (a) Falluppdelning. $|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$, $|2-x| = \begin{cases} x-2, & \text{om } x \geq 2 \\ 2-x, & \text{om } x \leq 2. \end{cases}$ Detta ger följande fall:

   - Om $x \leq 0$ fås $|x| + |2-x| = 3 \iff -x + 2 - x = 3 \iff x = -1/2$, som uppfyller villkoret $x \leq 0$, OK.
   - Om $0 \leq x \leq 2$ fås $|x| + |2-x| = 3 \iff x + 2 - x = 3 \iff 2 = 3$ som är olösbart.
   - Om $x \geq 2$ fås $|x| + |2-x| = 3 \iff x + x - 2 = 3 \iff x = 5/2$, som uppfyller villkoret $x \geq 2$, OK.

   Svar: $x = -1/2$ eller $x = 5/2$.

   (b) Summan är $s = \sum_{n=0}^{199} (500 + d \cdot n)$, där femte termen är $500 + 4d$ och uppfyller sambandet $500 + 4d = 476$, dvs $d = -6$. Således är $s = \sum_{n=0}^{199} (500 - 6n) =$
   $= 200 \cdot \dfrac{500 + (500 - 6 \cdot 199)}{2} = -19\,400.$

   Svar: Summan är $-19\,400$.

2. (a) Leden är definierade förutsatt att $x + 2 > 0$, $4 - 2x > 0$ och $5 - x > 0$, dvs då $-2 < x < 2$. För dessa x fås
   $\ln(x+2) = \ln(4-2x) - \ln(5-x) \iff \ln(x+2) + \ln(5-x) = \ln(4-2x) \iff$
   $\iff \ln((x+2)(5-x)) = \ln(4-2x) \iff$ / leden är definierade och ln är injektiv /
   $\iff (x+2)(5-x) = 4 - 2x \iff x^2 - 5x - 6 = 0 \iff x = -1$ eller $x = 6$, men av dessa är det endast $x = -1$ som uppfyller villkoret $-2 < x < 2$.

   Svar: $x = -1$.

   (b) Båda leden är positiva och ln är injektiv, så $2e^x = 2^x \iff \ln(2e^x) = \ln(2^x) \iff$
   $\iff x + \ln 2 = x \ln 2 \iff x(1 - \ln 2) = -\ln 2 \iff x = -\dfrac{\ln 2}{1 - \ln 2}$

   Svar: $x = -\dfrac{\ln 2}{1 - \ln 2}$.

3. (a) $\dfrac{25}{3+4i} e^{ix} = (3-4i)(\cos x + i \sin x) = 3\cos x + 4\sin x + i(3\sin x - 4\cos x)$, så
   $\operatorname{Im}\left(\dfrac{25}{3+4i} e^{ix}\right) = 3\sin x - 4\cos x.$

   Svar: $3\sin x - 4\cos x$.

   (b) $4z^2 - 16iz - 13 - 4i = 0 \iff z^2 - 4iz - 13/4 - i = 0 \iff (z - 2i)^2 = i - 3/4$. Sätt $z - 2i = a + bi$ (a, b reella) så fås $(a+bi)^2 = i - 3/4 \iff a^2 - b^2 + 2abi = i - 3/4$. Identifiera realdel, imaginärdel och belopp så fås

$$\begin{cases} \text{(Re)}: \ a^2 - b^2 = -3/4 \\ \text{(Im)}: \ 2ab = 1 \\ \text{(Abs)}: \ a^2 + b^2 = \sqrt{(-3/4)^2 + 1^2} = 5/4 \end{cases}$$

   där (Re) + (Abs) ger $2a^2 = 1/2$, dvs $a = \pm 1/2$ och (Im) ger $b = 1/(2a)$, dvs $a = 1/2$ ger $b = 1$ och $a = -1/2$ ger $b = -1$. Kontroll visar att dessa a och b uppfyller alla tre ekvationerna. Eftersom $z = a + bi + 2i$ fås slutligen $z = 1/2 + 3i$ eller $z = -1/2 + i$.

   Svar: $z = 1/2 + 3i$ eller $z = -1/2 + i$.

4. (a) $\sin x = \sin(3x - \pi/5) \iff \sin x \iff \begin{cases} x = 3x - \pi/5 + 2n\pi \\ \text{eller} \\ x = \pi - (3x - \pi/5) + 2n\pi \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x = \pi/10 - n\pi \\ \text{eller} \\ x = 3\pi/10 + n\pi/2 \end{cases} \qquad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $x = \pi/10 + n\pi$ eller $x = 3\pi/10 + n\pi/2$ där n är heltal.

(b) $\cos x < 0$ eftersom $\pi/2 < x < \pi$. Alltså är $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -2\sqrt{2}/3$, vilket ger $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1/3}{-2\sqrt{2}/3} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Svar: $\tan x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) $\cos\left(2 \arctan \dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) = \Big/ \cos 2v = 2\cos^2 v - 1 \text{ och } \cos^2 v = \dfrac{1}{1 + \tan^2 v} \Big/ =$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2\left(\arctan \frac{2}{\sqrt{7}}\right)} - 1 = \frac{2}{1 + \frac{4}{7}} - 1 = \frac{3}{11}.$$

Alt: $\cos\left(\arctan \dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)$ *kan bestämmas ur lämplig rätvinklig triangel.*

Svar: $3/11$.

5. $\sqrt{3}\cos \pi x - \sin \pi x = \sqrt{2} \iff 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos \pi x - \dfrac{1}{2}\sin \pi x\right) = \sqrt{2} \iff$

$$\iff \Big/ v = \pi/6 \text{ är en lösning till } \cos v = \sqrt{3}/2,\ \sin v = 1/2 \Big/ \iff$$

$$\iff \cos\frac{\pi}{6}\cos \pi x - \sin\frac{\pi}{6}\sin \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff$$

$$\iff \frac{\pi}{6} + \pi x = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi \iff x = \frac{1}{12} + 2n \text{ eller } x = -\frac{5}{12} + 2n \text{ där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $x = \dfrac{1}{12} + 2n$ eller $x = -\dfrac{5}{12} + 2n$ där n är heltal.

6. Funktionen är definierad då $\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3} \geq 0$.

$2e^x - 1 = 0 \iff x = -\ln 2$ och $e^x - 3 = 0 \iff x = \ln 3$ så teckentabellen

x		$-\ln 2$		$\ln 3$	
$2e^x - 1$	$-$	0	$+$		$+$
$e^x - 3$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3}$	$+$	0		$\nexists$	$+$

visar att funktionen är definierad då $x \leq -\ln 2$ eller $x > \ln 3$.

$y = \sqrt{\dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3}} \implies y^2 = \dfrac{2e^x - 1}{e^x - 3} \implies y^2(e^x - 3) = 2e^x - 1 \implies$

$\implies e^x(y^2 - 2) = 3y^2 - 1 \implies e^x = \dfrac{3y^2 - 1}{y^2 - 2} \implies x = \ln\dfrac{3y^2 - 1}{y^2 - 2}$ dvs ekvationen $y = f(x)$ har högst en lösning för varje y vilket visar att f är injektiv och att $f^{-1}(y) = \ln\dfrac{3y^2 - 1}{y^2 - 2}$.

Svar: $D_f = \{x : x \leq -\ln 2 \text{ eller } x > \ln 3\}$, $f^{-1}(x) = \ln\dfrac{3x^2 - 1}{x^2 - 2}$.

7. $\tan(VL) = \tan(\arctan x + \arctan(x+1)) = \dfrac{x+(x+1)}{1-x(x+1)} = \dfrac{2x+1}{1-x-x^2} = \tan(HL)$.
Dessutom gäller $-\pi/2 < HL < \pi/2$, och eftersom tan är injektiv (strängt växande) på detta intervall så kommer leden att vara lika för alla x sådana att $-\pi/2 < VL < \pi/2$.

Observera att $\arctan x$ är ett argument för ett komplext tal, $1+ix = \sqrt{1+x^2}\, e^{i\arctan x}$.
På samma sätt är $1+i(x+1) = \sqrt{1+(x+1)^2}\, e^{i\arctan(x+1)}$, så
$(1+ix)(1+i(x+1)) = \sqrt{(1+x^2)(1+(x+1)^2)}\, e^{i(\arctan x+\arctan(x+1))}$.
Eftersom $-\pi < \arctan x + \arctan(x+1) < \pi$ så följer därför att
$-\dfrac{\pi}{2} < \arctan x + \arctan(x+1) < \dfrac{\pi}{2} \iff \operatorname{Re}\big((1+ix)(1+i(x+1))\big) > 0$.
Men $\operatorname{Re}\big((1+ix)(1+i(x+1))\big) = 1-x-x^2 = -(x^2+x-1) = -\left(x+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$
så teckenstudium på vanligt sätt visar att olikheten gäller då $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Svar: $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.