LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN3

Tentamen i Matematisk grundkurs 2014-01-07 kl 8-13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng[1] till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9.

För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Vilka reella x uppfyller sambandet $1 + 2x + \sqrt{8x^2 - 14} = 0$? (2 p)

   (b) Definiera $|z|$ om $z = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$. (1 p)

2. (a) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är $\dfrac{e^{x^2} - 1}{7 - e^{x^2}} = \dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 8}$? (1 p)

   (b) Lös ekvationen $\ln x = \dfrac{\ln \frac{1}{x} - \ln x^2}{\ln \frac{e}{x} + \ln x^3 + \ln ex - \ln x^2}$. (2 p)

3. (a) Beräkna $\sin\left(\arccos \dfrac{1}{3}\right)$. (1 p)

   (b) Bestäm $\cos v$ om man vet att $\tan v = \dfrac{3}{4}$ och att $\pi < v < 2\pi$. (1 p)

   (c) För vilka reella x är $3 \sin 2x - 1 = 0$? (1 p)

4. Lös ekvationen $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos 3x = 1 + \sin 3x$.

5. Bestäm alla komplexa nollställen till $p(z) = z^5 + 2z^3 - 2z^2 - 4$ om man vet att $z = i\sqrt{2}$ är ett nollställe till $p(z)$.

6. Bestäm D_f om $f(x) = \arctan \sqrt{\ln\left(\dfrac{2x - 3}{x - 4}\right)}$. Lös också olikheten $f(x) \geq \dfrac{\pi}{4}$.

7. Om $z = x + iy$ där $x, y \in \mathbf{R}$ är ett godtyckligt komplext tal definieras e^z och $\sin z$ enligt $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ och $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

   Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $\sin z = 2$.

[1] Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Minst 6 poäng på dugga 2 ger 2 bonuspoäng, godkänd dugga 2 ger ytterligare 2 bonuspoäng, d v s godkänd dugga 2 ger totalt 4 bonuspoäng.

Tentamen i TATM79, 2014-01-07 lösningsförslag

1. (a) $1+2x+\sqrt{8x^2-14}=0 \iff \sqrt{8x^2-14}=-1-2x \implies 8x^2-14=(-1-2x)^2$ $\iff 4x^2-4x-15=0 \iff x^2-x-\dfrac{15}{4}=0 \iff x=\dfrac{5}{2}$ eller $x=-\dfrac{3}{2}$. Eftersom vi ej har ekvivalens vid kvadreringen så MÅSTE vi kontrollera i ursprungliga ekvationen.

   - $x=\dfrac{5}{2}$ ger $V.L.=1+2\cdot\dfrac{5}{2}+\sqrt{8\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-14}=6+\sqrt{36}=6+6=12\neq H.L.$, dvs $x=\dfrac{5}{2}$ är en **inte** lösning.
   - $x=-\dfrac{3}{2}$ ger $V.L.=1+2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+\sqrt{8\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-14}=-2+\sqrt{4}=-2+2=0=H.L.$, dvs $t=-\dfrac{3}{2}$ är en lösning.

   (Alt: $-1-2x=\sqrt{8x^2-14}\geq 0$ kräver att $x\leq -1/2$. För dessa x är båda led ≥ 0 och vi får ekvivalens vid kvadreringen.)

   Svar: $x=-3/2$.

   (b) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. (a) $\dfrac{e^{x^2}-1}{7-e^{x^2}}=\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}+8} \iff \Big/\text{sätt } t=e^{x^2}>0\Big/ \iff \begin{cases}\dfrac{t-1}{7-t}=\dfrac{t}{t+8}\\ t>0\end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases}(t-1)(t+8)=t(7-t)\\ t>0,\ t\neq 7\end{cases} \iff \begin{cases}t^2-4=0\\ t>0,\ t\neq 7\end{cases} \iff \begin{cases}t=\pm 2\\ t>0,\ t\neq 7\end{cases} \iff$$

$$\iff t=2 \iff e^{x^2}=2=e^{\ln 2} \iff \Big/\text{exponentialfunktionen är injektiv}\Big/ \iff$$

$$\iff x^2=\ln 2 \iff x=\pm\sqrt{\ln 2}.$$

   Svar: $x=\pm\sqrt{\ln 2}$.

   (b) Logaritmerna är definierade förutsatt att $x>0$, $\dfrac{1}{x}>0$, $x^2>0$, $\dfrac{e}{x}>0$, $x^3>0$ och $ex>0$, dvs då $x>0$. För dessa x är

$$\ln x=\frac{\ln\frac{1}{x}-\ln x^2}{\ln\frac{e}{x}+\ln x^3+\ln ex-\ln x^2} \iff \ln x=\frac{-\ln x-2\ln x}{1-\ln x+3\ln x+1+\ln x-2\ln x}$$

$$\iff \ln x=\frac{-3\ln x}{2+\ln x} \iff \ln x\left(1+\frac{3}{2+\ln x}\right)=0 \iff$$

$$\iff \ln x=0 \text{ eller } 2+\ln x=-3 \iff \ln x=0 \text{ eller } \ln x=-5 \iff$$

$$\iff x=1 \text{ eller } x=e^{-5}.$$

   Svar: $x=1$ eller $x=e^{-5}$.

3. (a) Eftersom $0<\dfrac{1}{3}<1$ så är $0<\arccos\dfrac{1}{3}<\dfrac{\pi}{2}$ och därmed är $\arccos\dfrac{1}{3}$ vinkel i en rätvinklig triangel med närliggande katet $=1$, hypotenusa $=3$ och motstående katet $=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}$. RITA FIGUR! Av detta följer att $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{8}}{3}$.

   Svar: $\dfrac{\sqrt{8}}{3}$.

(b) $\cos^2 v = \dfrac{1}{1+\tan^2 v} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{16}{25} \iff \cos v = \pm\dfrac{4}{5}$. Men $\pi < v < 2\pi$ och $\tan v = \dfrac{3}{4} > 0$ så $\pi < v < \dfrac{3\pi}{2}$, vilket gör att $\cos v < 0$. Således är $\cos v = -\dfrac{4}{5}$.

(Alt: $v = u + \pi$, där $0 < u < \pi$ och $\tan u = \tan(v-\pi) = \tan v = \dfrac{3}{4} > 0$ så $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$. Därmed kan u illustreras i en rätvinklig triangel (som i a-uppgiften) och ur denna fås att $\cos u = \dfrac{4}{5}$. Slutligen fås $\cos v = \cos(u+\pi) = -\cos u = -\dfrac{4}{5}$.)

Svar: $\cos v = -\dfrac{4}{5}$.

(c) $3\sin 2x - 1 = 0 \iff \sin 2x = \dfrac{1}{3} \iff \Big/ -1 \le \dfrac{1}{3} \le 1 \Big/ \iff$

$$\iff \sin 2x = \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) \iff \begin{cases} 2x = \arcsin\frac{1}{3} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 2x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \end{cases} \quad \text{där } n \text{ är heltal.}$$

Svar: $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \\ \text{eller} \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + n\pi \end{cases}$ där n är heltal.

4. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x = 1 + \sin 3x \iff \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos 3x - \sin 3x = 1 \iff \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right) = 1$

$\iff \Big/ \sin v = \dfrac{1}{2},\ \cos v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ har en lösning $v = \dfrac{5\pi}{6} \Big/ \iff$

$$\iff \sin\frac{5\pi}{6}\cos 3x + \cos\frac{5\pi}{6}\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\left(3x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x + \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \\ \text{eller} \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases}$$

där n är heltal.

Svar: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3} \\ \text{eller} \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{n2\pi}{3} \end{cases}$ där n är heltal.

5. Eftersom polynomet har reella koefficienter och $z = i\sqrt{2}$ är ett nollställe, är även $\bar{z} = -i\sqrt{2}$ ett nollställe. Polynomet innehåller således faktorerna $(z - i\sqrt{2})$ och $(z + i\sqrt{2})$. Polynomdivision (dividera $p(z)$ med $(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2}) = z^2 + 2$) ger $p(z) = \left(z^2 + 2\right)\left(z^3 - 2\right)$. Övriga nollställen till $p(z)$, utöver $z = \pm i\sqrt{2}$, fås då $z^3 - 2 = 0 \iff z^3 = 2 \iff$

$$\iff \Big/ z = re^{iv} \text{ där } r \geq 0,\ v \text{ reellt} \Big/ \iff r^3 e^{3iv} = 2e^{i0} \iff \begin{cases} \text{(Abs): } r^3 = 2 \\ \text{(Arg): } 3v = 0 + n2\pi \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{2} \\ v = \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \iff z = \sqrt[3]{2}e^{2n\pi i/3}$$ där $n = 0, 1, 2$ ger de tre olika lösningarna till tredjegradsekvationen. Således har vi samtliga fem lösningar, nämligen $z = i\sqrt{2}$, $z = -i\sqrt{2}$, $z = \sqrt[3]{2}$, $z = \sqrt[3]{2}e^{2\pi i/3} = \sqrt[3]{2}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ samt $z = \sqrt[3]{2}e^{4\pi i/3} = \sqrt[3]{2}\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Svar: $z = \pm i\sqrt{2}$, $z = \sqrt[3]{2}$ samt $z = 2^{-2/3}\left(-1 \pm \sqrt{3}\,i\right)$.

6. Funktionen är definierad då $\ln\left(\dfrac{2x-3}{x-4}\right) \geq 0 \iff \dfrac{2x-3}{x-4} \geq 1 \iff \dfrac{2x-3}{x-4} - 1 \geq 0 \iff$ $\dfrac{x+1}{x-4} \geq 0 \iff \Big/\text{teckentabell kan hjälpa}\Big/ \iff x > 4$ eller $x \leq -1$.

$$f(x) \geq \frac{\pi}{4} \iff \arctan\sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)} \geq \frac{\pi}{4} \iff \arctan\sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)} \geq \arctan 1 \iff$$

$$\iff \Big/\text{arctan är strängt växande}\Big/ \iff \sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right)} \geq 1 \iff$$

$$\iff \Big/\text{rotfunktionen är strängt växande}\Big/ \iff \ln\left(\frac{2x-3}{x-4}\right) \geq 1 \iff$$

$$\iff \Big/\ln \text{ är strängt växande}\Big/ \iff \frac{2x-3}{x-4} \geq e \iff \frac{2x-3-e(x-4)}{x-4} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{(2-e)x+4e-3}{x-4} \geq 0 \iff \Big/ 2-e < 0 \Big/ \iff \frac{x - \frac{4e-3}{e-2}}{x-4} \leq 0$$ och eftersom $\dfrac{4e-3}{e-2} = \dfrac{4(e-2)+5}{e-2} = 4 + \dfrac{5}{e-2} > 4$ så ger teckentabellen

x		4		$\frac{4e-3}{e-4}$	
$x - \frac{4e-3}{e-4}$	$-$		$-$	0	$+$
$x-4$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x - \frac{4e-3}{e-4}}{x-4}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

att olikheten gäller då $4 < x \leq \dfrac{4e-3}{e-2}$.

Svar: $D_f = \{x : x \leq -1 \text{ eller } x > 4\}$.
Olikheten gäller då $4 < x \leq \dfrac{4e-3}{e-2}$.

7. $\sin z = 2 \iff \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \iff e^{iz} - e^{-iz} - 4i = 0 \iff \Big/ e^{iz} \neq 0 \Big/ \iff$

$\iff \left(e^{iz}\right)^2 - 4ie^{iz} - 1 = 0$. Med $e^{iz} = w$ fås

$w^2 - 4iw - 1 = 0 \iff (w-2i)^2 + 3 = 0 \iff (w-2i)^2 - (\sqrt{3}\,i)^2 = 0 \iff$

$\iff (w - 2i - \sqrt{3}\,i)(w - 2i + \sqrt{3}\,i) = 0 \iff w = (2+\sqrt{3})i$ eller $w = (2-\sqrt{3})i$.

- $w = (2+\sqrt{3})i$ ger $e^{iz} = (2+\sqrt{3})i \iff$

  $\iff \Big/ z = x + iy$ ger $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y} \cdot e^{ix}$, $(2+\sqrt{3})i = (2+\sqrt{3})e^{\pi i/2} \Big/ \iff$

  $$\iff e^{-y} \cdot e^{ix} = (2+\sqrt{3})e^{\pi i/2} \iff \begin{cases} \text{(Abs): } e^{-y} = 2+\sqrt{3} \\ \text{(Arg): } x = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases} \iff$$

  $$\iff \begin{cases} y = -\ln(2+\sqrt{3}) \\ x = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi \end{cases} \iff z = \frac{\pi}{2} + n2\pi - i\ln(2+\sqrt{3}),\text{ där } n \text{ är heltal.}$$

- $w = (2-\sqrt{3})i$ ger $e^{iz} = (2-\sqrt{3})i$ och på motsvarande sätt fås $z = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi - i\ln(2-\sqrt{3})$, där n är heltal.

Svar: $z = \dfrac{\pi}{2} + n2\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, där n är heltal.