Föreläsning 10: Pearsons χ^2-test

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

12 mars 2020

"Oh, you suffer beautifully."
–Pinhead

1 Konvergens

För att kunna få lite precision i argumenten i detta område behöver vi lite begrepp angående konvergens av stokastiska variabler. Eftersom vi har introducerat sannolikhet så uppstår nu en hel rad spännande möjligheter till olika typer av konvergens. Vissa av dessa har vi redan (mer eller mindre) implicit stött på. Tänk på de stora talens lag eller konsistens hos skattningar (detta brukar vara konvergens i sannolikhet) respektive centrala gränsvärdessatsen (konvergens i fördelning).
Kom ihåg att en stokastisk variabel X är en funktion från utfallsrummet Ω till $\mathbf{R}$ (eller mer generellt $\mathbf{R}^n$). En följd stokastiska variabler X_n är alltså en följd funktioner, och som bekant från envariabelanalysen kan denna följd *konvergera* mot en funktion X om det är så att

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \text{för alla } \omega \in \Omega.$$

Detta brukar kallas *punktvis konvergens*, eller i sannolikhetstermer: **säker konvergens**.
Nu är det sällan vi kommer att ha säker konvergens eftersom sannolikhet är inblandad, så låt oss börja med en annan typ av konvergens som kan vara värd att ha sett om inte annat än för att kunna säga saker som att något är "nästan säkert" och faktiskt mena något väldigt specifikt...

Definition. Låt X_n, $n = 1, 2, \ldots$, vara en följd stokastiska variabler. Vi säger att X_n konvergerar till X nästan säkert (almost surely) om

$$P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1.$$

Vi skriver i detta fall att $X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X$.

Tänk på att en stokastisk variabel X avbildar ett utfallsrum Ω in i $\mathbf{R}$ (eller $\mathbf{R}^n$). Vad definitionen ovan säger är att denna *funktion* konvergerar punktvis $X_n(\omega) \to X(\omega)$ för alla ω förutom en delmängd som har sannolikhet noll.

Konvergens i sannolikhet

Definition. Låt X_n, $n = 1, 2, \ldots$, vara en följd stokastiska variabler. Vi säger att X_n konvergerar till en stokastisk variabel X i sannolikhet om för alla $\epsilon > 0$ så gäller att

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

och vi skriver i detta fall att $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$. Generaliserar naturligt till högre dimensioner.

Vi kan notera att

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{P}} X,$$

men inte omvänt. Detta är inte självklart utan hänger i princip på att vi kan byta ut ordningen på att beräkna sannolikhet och ta ett gränsvärde. Den intresserade kan slå upp Fatous lemma. Den sista konvergenstypen vi betraktar är konvergens i fördelning. Vad detta innebär informellt är att fördelningsfunktionerna för X_n konvergerar punktvis mot fördelningsfunktionen för X.

Definition. Låt X_n, $n = 1, 2, \ldots$, vara en följd stokastiska variabler. Vi säger att X_n konvergerar till en stokastisk variabel X i fördelning om

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

för alla x (där F är kontinuerlig). Här är F_{X_n} och F_X respektive fördelningsfunktion, och vi skriver att $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$. I högre dimensioner formuleras ofta kraven direkt i termer av sannolikhet enligt

$$\boldsymbol{X_n} \xrightarrow{\text{D}} \boldsymbol{X} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(\boldsymbol{X_n} \in E) = P(\boldsymbol{X} \in E)$$

för alla rimliga mängder E sådana att $P(\partial E) = 0$.

Egenskapen att mängden E uppfyller att $P(\partial E) = 0$ brukar kallas för att E är en kontinuitetsmängd (kommer från mått-teorin) för måttet P. Alternativt kan man betrakta fördelningsfunktionen, så låt

$$E(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^k : y_1 \leq x_1,\ y_2 \leq x_2,\ \ldots,\ y_k \leq x_k\}$$

så att fördelningsfunktionen F ges av $F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(\boldsymbol{X} \in E(\boldsymbol{x}))$. Detta följer direkt från att den flerdimensionella fördelningsfunktionen ges av

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_k \leq x_k)$$

Randen ∂E till E kan vi uttrycka som

$$E(\boldsymbol{x}) \cap \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^k : y_i = x_i \text{ för något } i,\ 1 \leq i \leq k\},$$

så om $P(\boldsymbol{X} \in \partial E(\boldsymbol{x})) = 0$ är helt enkelt F kontinuerlig i punkten $\boldsymbol{x}$.
Värt även att notera att

$$X_n \xrightarrow{\text{P}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{D}} X.$$

Även här är beviset ganska tekniskt, men det är värt att komma ihåg att konvergens i fördelning är den svagaste typen av konvergens vi tagit upp.

Definition. Om $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ kallas fördelningen för X för den **asymptotiska** fördelningen för sekvensen X_n, $n = 1, 2, \ldots$.

Ibland krävs att denna fördelning inte är allt för degenererad för att kallas för en asymptotisk fördelning.

1.1 Ordo i sannolikhet

Redo för något riktigt skoj? För att beskriva hastigheten hos konvergens används ibland varianter av ordo-notationen ni har stött på tidigare (envariabel del 2).
Vi skriver att $X_n = o_p(a_n)$ om $\dfrac{X_n}{a_n} = o_p(1)$, där

$$Y_n = o_p(1) \quad \Leftrightarrow \quad Y_n \to 0 \text{ i sannolikhet.}$$

Vi säger att $X_n = O_p(a_n)$ om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett ändligt $M > 0$ och ett ändligt $N > 0$ så att

$$P\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > M\right) < \epsilon \text{ för alla } n > N.$$

1.2 Ett par användbara resultat (utan bevis)

Vi har nu introducerat några begrepp kring konvergens av följder av stokastiska variabler. Ofta är man intresserad av funktioner av stokastiska variabler på olika sätt, så vad kan man säga om konvergensen efter att ha gjort någon form av sammansättning?
Till exempel kan vi notera att $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ och $Y_n \xrightarrow{\text{D}} Y$ *inte* medför att $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{D}} X + Y$ eller $X_n Y_n \xrightarrow{\text{D}} XY$ i det generella fallet. Men under vissa förutsättningar har vi resultat som ofta duger när vi vill åt ovanstående.

The Continuous Mapping Theorem

Sats. Låt g vara kontinuerlig. Då gäller att

(i) $X_n \xrightarrow{\text{P}} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{\text{P}} g(X)$;

(ii) $X_n \xrightarrow{\text{D}} X \quad \Rightarrow \quad g(X_n) \xrightarrow{\text{D}} g(X)$.

Generaliserar till vektorvärda stokastiska variabler.

Kontinuerliga operationer fungerar alltså precis som vi förväntar oss. Konvergens i fördelning bevaras av kontinuerliga avbildningar. Beviset är inte jättekomplicerat, men bygger på argument och definitioner vi inte har tillgång till i nuläget (åter igen denna mått- och integrationsteori). Man kan ju tro att summor av följder borde fungera lika enkelt, men så är inte fallet om vi endast har konvergens i fördelning.

Slutskys sats

Sats. Om $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$ och $Y_n \xrightarrow{\text{P}} c$, där c är en konstant, så gäller att

$$\text{(i) } X_n + Y_n \xrightarrow{\text{D}} X + c \quad \text{(ii) } X_n\, Y_n \xrightarrow{\text{D}} X\, c \quad \text{(iii) } \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\text{D}} \frac{X}{c} \text{ under förutsättning att } c \neq 0.$$

Även detta generaliserar till vektorvärda stokastiska variabler.

1.3 Flerdimensionella centrala gränsvärdessatsen

Bara för att påminna så såg vi i grundkursen i sannolikhetslära att summan av oberoende likafördelade variabler (med ändlig varians) alltid går mot en normalfördelning (konvergens i fördelning). Kompakt uttryckt gäller alltså att $\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right) \xrightarrow{\text{D}} N(0, \sigma^2)$ om $E(X_i) = \mu$ och $V(X_i) = \sigma^2$. Motsvarande gäller i högre dimensioner, men i vanlig ordning har vi nu en hel kovariansmatris att hålla ordning på istället för endast variansen. En variant av den multivariata CGS kan formuleras enligt följande.

Flerdimensionella centrala gränsvärdessatsen

Sats. Låt $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ vara en vektorvärd stokastisk variabel med kovariansmatris C. Implicit här är att $V(X_j) < \infty$ för $j = 1, 2, \ldots, k$. Låt $\boldsymbol{X}_n$ vara en följd av oberoende vektorer med samma fördelning som $\boldsymbol{X}$. Då gäller att

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - E(\boldsymbol{X})) \xrightarrow{\text{D}} N(0, C).$$

Notera även att

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{X}_i - E(\boldsymbol{X})) = \sqrt{n}\left(\overline{\boldsymbol{X}_n} - E(\boldsymbol{X})\right),$$

så vi kan mer kompakt skriva $\sqrt{n}\left(\overline{\boldsymbol{X}_n} - E(\boldsymbol{X})\right) \to N(0, C)$.

1.4 Delta-metoden

En naturlig fråga är följande: om vi vet att X_n har en asymptotisk fördelning, vad kan man säga om $g(X_n)$? Ett naturligt angreppsätt är givetvis att helt enkelt ta en Taylorutveckling av g och visa att resttermen beter sig som $o_p(1)$ så att den inte stör. Det generella fallet blir lite bökigt, så vi koncentrerar oss på normalfördelningen.

Delta-metoden för asymptotisk normalfördelning

Sats. Antag att $X_n \xrightarrow{\text{P}} \theta$ och $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{\text{D}} X \sim N(0, \sigma^2)$ då $n \to \infty$ (i princip resultatet av centrala gränsvärdessatsen) och låt $g \in C^1$ i en omgivning av θ samt antag att $g'(\theta) \neq 0$. Då gäller att

$$\sqrt{n}\left(g(X_n) - g(\theta)\right) \xrightarrow{\text{D}} X \sim N(0, (g'(\theta))^2\sigma^2),$$

då $n \to \infty$.

Bevis. Enligt medelvärdessatsen så gäller att

$$g(X_n) - g(\theta) = g'(\xi)\,(X_n - \theta)\,,$$

där ξ ligger mellan X_n och θ. Eftersom $X_n \xrightarrow{\text{P}} \theta$ så måste även $\xi \xrightarrow{\text{P}} \theta$. Satsen ovan om kontinuerliga avbildningar medför då att $g'(\xi) \xrightarrow{\text{P}} g'(\theta)$. Alltså måste

$$\sqrt{n}\,(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\text{D}} Z \sim N(0, (g'(\theta))^2\sigma^2),$$

allt enligt Slutskys sats! Vi kan även formulera det hela asymptotiskt enligt

$$\sqrt{n}\,(g(X_n) - g(\theta)) = g'(\theta)\sqrt{n}\,(X_n - \theta) + o_p(1),$$

genom att helt enkelt skriva

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,(g(X_n) - g(\theta)) &= \sqrt{n}g'(\xi)\,(X_n - \theta)\\ &= \sqrt{n}(X_n - \theta)g'(\theta) + \underbrace{\sqrt{n}\,(X_n - \theta)}_{=O_p(1)}\underbrace{(g'(\xi) - g'(\theta))}_{=o_p(1)},\end{aligned}$$

där vi nyttjar att $\sqrt{n}(X_n - \theta)$ konvergerar i fördelning – vilket betyder stokastiskt begränsad så $O_p(1)$ – och att $g'(\xi) \xrightarrow{\text{P}} g'(\theta)$. □

Vad händer i flera dimensioner? I princip är det helt analogt. Låt $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ vara en konsistent skattning av $\boldsymbol{\theta}$ så att

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \xrightarrow{\text{D}} Z \sim N(\mathbf{0}, C).$$

Om vi för enkelhetens skull antar att $g \in C^2$ i en omgivning av $\boldsymbol{\theta}$, så är som bekant

$$g(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = g(\boldsymbol{\theta}) + \nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) + R(\widehat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Om vi betraktar variansen för vår approximation (där vi bortser från resttermen) så ser vi att

$$\begin{aligned}V\left(g(\boldsymbol{\theta}) + \nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)\right) &= V\left(\nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \cdot \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \mathrm{Cov}\left(\nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \cdot \widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)\\ &= \nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \nabla g(\boldsymbol{\theta}) = \nabla g(\boldsymbol{\theta})^T \frac{1}{n}\, C\, \nabla g(\boldsymbol{\theta}).\end{aligned}$$

Genom att likt i envariabelfallet använda medelvärdessatsen kan vi nu visa att

$$\sqrt{n}\left(g(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - g(\boldsymbol{\theta})\right) \xrightarrow{\text{D}} Z \sim N\left(\mathbf{0}, \nabla g(\boldsymbol{\theta})^T C \nabla g(\boldsymbol{\theta})\right).$$

2 Det grundläggande χ^2-testet

Antag att vi har följande situation

(i) Vi har n stycken oberoende stokastiska variabler X_j med samma fördelning, där X_j har precis k möjliga utfall.

(ii) Numrera utfallen enligt $A_1, \ldots, A_k$ och låt $p_j = P(A_j)$ vara respektive sannolikhet. Då är $p_1 + p_2 \cdots + p_k = 1$.

(iii) Låt Y_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, vara antalet gånger händelsen A_i inträffar.

För att konkretisera en aning, tänk att vi har k stycken lådor A_j vi kastar bollar i. Experimentet är uppställt så att en kastad boll alltid hamnar i en låda. Vi låter p_j vara sannolikheten att en boll hamnar i låda A_j. Vi kastar n bollar (oberoende) och räknar sedan hur många bollar Y_j som det finns i varje låda. Givetvis kommer $Y_j \sim \text{Bin}(n, p_j)$, men variablerna Y_j är *inte* oberoende av varandra (antalet bollar i alla lådorna summerar till n).
Vad vi kommer gör är att betrakta uppdelningar av denna typ och ställa upp hypotestest där vi låter nollhypotesen H_0 ges av

$$H_0 : P(A_1) = p_1,\ P(A_2) = p_2,\ \ldots,\ P(A_k) = p_k,$$

där $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är sannolikheter så att $p_1 + \cdots + p_k = 1$, och testar mot hypotesen

$$H_1 : \text{det finns något } j \text{ så att } P(A_j) \neq p_j.$$

Om H_0 är sann, så blir de förväntade frekvenserna $E(Y_j) = n \cdot p_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Låt oss definiera

$$q = \sum_{j=1}^{k} \frac{(y_j - np_j)^2}{np_j},$$

där y_j är observationen av Y_j. Ett stort värde på q borde rimligen indikera att H_0 inte gäller (åtminstone något p_j måste skilja sig markant från det förväntade värdet np_j).
Storheten q är en observation av den stokastiska variabeln

$$Q = \sum_{j=1}^{k} \frac{(Y_j - np_j)^2}{np_j} \overset{\text{appr.}}{\sim} \chi^2(k-1).$$

Att detta blir approximativt χ^2-fördelat följer av följande sats.

Sats. Med beteckningarna ovan gäller att $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{(Y_j - np_j)^2}{np_j} \xrightarrow{\text{D}} X$, där $X \sim \chi^2(k-1)$. Konvergensen är alltså i fördelning.

Bevis. Eftersom Y_j är binomialfördelad vet vi att $E(Y_j) = np_j$ och $V(Y_j) = np_j(1-p_j)$, så de standardiserade variablerna

$$\frac{Y_j - np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}} \xrightarrow{D} \widetilde{Z_j} \sim N(0,1),$$

för något $\widetilde{Z_j}$ enligt centrala gränsvärdessatsen (CGS). Konvergensen är i meningen att fördelningsfunktionen $F_{n,j}(y) \to \Phi(y)$ för alla $y \in \mathbf{R}$. En följd av detta är att

$$\frac{Y_j - np_j}{\sqrt{np_j}} \xrightarrow{D} Z_j \sim N(0, 1-p_j),$$

eftersom om $U_n \xrightarrow{D} U$ så gäller att $h(U_n) \xrightarrow{D} h(U)$ för alla kontinuerliga funktioner h (brukar kallas sannolikhetsteorins open mapping theorem). Anledningen till den sista manövern är att

vi ska få det lite lättare att analysera beroendestrukturen hos Z_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Eftersom väntevärdet är $E(Y_j) = np_j$ kommer

$$C\left(\frac{Y_i - np_i}{\sqrt{np_i}}, \frac{Y_j - np_j}{\sqrt{np_j}}\right) = E\left(\frac{Y_i - np_i}{\sqrt{np_i}}\frac{Y_j - np_j}{\sqrt{np_j}}\right) = \frac{1}{n\sqrt{p_i p_j}}\left(E(Y_iY_j) - 2n^2p_ip_j + n^2p_ip_j\right)$$
$$= \frac{1}{n\sqrt{p_i p_j}}\left(E(Y_iY_j) - n^2p_ip_j\right)$$

För att beräkna $E(Y_iY_j)$ går vi tillbaka till variablerna X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Låt I_A beteckna *indikatorfunktionen* för mängden A. Detta innebär att

$$I_{A_j}(X_i) = \begin{cases} 1 \text{ om } X_i \in A_j, \\ 0 \text{ om } X_i \notin A_j. \end{cases}$$

Vi kan då skriva $Y_j = \sum_{i=1}^{n} I_{A_j}(X_i)$ och eftersom X_i är Bernoullifördelade (2-punktsfördelade) följer det att $E(I_{A_j}(X_i)) = p_j$. Vi har nu, för $i \neq j$,

$$E(Y_iY_j) = E\left(\left(\sum_{l=1}^{n} I_{A_i}(X_l)\right)\left(\sum_{m=1}^{n} I_{A_j}(X_m)\right)\right) = E\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} I_{A_i}(X_l)\, I_{A_j}(X_m)\right)$$
$$= E\left(\sum_{l=1}^{n} I_{A_i}(X_l)\, I_{A_j}(X_l)\right) + E\left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq l}}^{n} I_{A_i}(X_l)\, I_{A_j}(X_m)\right)$$
$$= 0 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq l}}^{n} E(I_{A_i}(X_l))\, E(I_{A_j}(X_m)) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq l}}^{n} p_ip_j = n(n-1)p_ip_j,$$

eftersom $I_{A_i}(X_l)\, I_{A_j}(X_l) = 0$ (samma boll kan inte hamna i två lådor) samt att $I_{A_i}(X_l)$ och $I_{A_j}(X_m)$ är oberoende om $l \neq m$. Således blir

$$C\left(\frac{Y_i - np_i}{\sqrt{np_i}}, \frac{Y_j - np_j}{\sqrt{np_j}}\right) = -\sqrt{p_ip_j},$$

för $i \neq j$. Följaktligen måste således kovariansmatrisen för $\boldsymbol{Z} = (Z_1\ Z_2\ \cdots\ Z_k)^T$ ha utseendet

$$C_{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} 1-p_1 & -\sqrt{p_1p_2} & -\sqrt{p_1p_3} & \cdots & -\sqrt{p_1p_k} \\ -\sqrt{p_2p_1} & 1-p_2 & -\sqrt{p_2p_3} & \cdots & -\sqrt{p_2p_k} \\ -\sqrt{p_3p_1} & -\sqrt{p_3p_2} & 1-p_3 & \cdots & -\sqrt{p_3p_k} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{p_kp_1} & -\sqrt{p_kp_2} & -\sqrt{p_kp_3} & \cdots & 1-p_k \end{pmatrix}.$$

vilket kan skrivas lite mer kompakt som $C_{\boldsymbol{Z}} = I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T$, där $\boldsymbol{p} = (\sqrt{p_1}\ \sqrt{p_2}\ \cdots\ \sqrt{p_k})^T$. Denna omskrivning gör att vi enkelt kan se att

$$(I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T)^2 = I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T \quad \text{och} \quad (I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T)^T = I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T,$$

så $I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T$ är en projektionsmatris och har därför egenvärdena $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$. Vi har nu att $\boldsymbol{Z} \sim N(\boldsymbol{0}, C_{\boldsymbol{Z}})$. På samma sätt som i beviset av regressionsanalysens huvudsats ser vi att

$$\operatorname{rank}(I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T) = \operatorname{tr}(I - \boldsymbol{p}\boldsymbol{p}^T) = k - 1,$$

så $\lambda = 0$ är ett enkelt egenvärde. Matrisen är symmetrisk och positivt semidefinit, så det finns en ON-matris C så att $C^T C_{\boldsymbol{Z}} C = \text{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0)$ blir en diagonalmatris. Om vi låter $\boldsymbol{W} = C\boldsymbol{Z}$ ser vi att $\boldsymbol{W} \sim N(\boldsymbol{0}, \text{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0))$ och att

$$\boldsymbol{Z}^T \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{W} = \sum_{j=1}^{k-1} W_j^2,$$

där $W_j \sim N(0, 1)$ är oberoende. Denna summa är som bekant $\chi^2(k-1)$-fördelad! □

När duger approximationen?

Föregående sats gäller alltså *asymptotiskt* (då $n \to \infty$) och säger inget direkt om vad som gäller i det enskilda fallet. En tumregel är att vi vill ha $np_j \geq 5$ för $j = 1, 2, \ldots, k$ för att vara ganska säkra på att approximationen är bra. Har vi lådor med väldigt få ”bollar” i kan det hända att testet inte blir bra.

3 Test av given diskret fördelning

Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara oberoende diskreta stokastiska variabler med $X_j \in A$ för någon diskret mängd A. Vi är intresserade av att testa om $X_j \sim F$ för någon given diskret fördelning med sannolikhetsfunktion $p(j)$, $j \in A$. Vi kommer använda nollhypotesen

$$H_0 : P(X = j) = p(j),\ j \in A,$$

och testar den med mothypotesen

$$H_1 : P(X = j) \neq p(j) \text{ för något } j \in A.$$

Exempel

Den stokastiska variabeln X antar värden i mängden $\{0, 1, 2\}$. Vid 1250 observationer fann man att $X = 0$ 783 gånger, $X = 1$ 425 gånger samt $X = 2$ 42 gånger. Testa med signifikansnivån 1% om $X \sim \text{Bin}(2, 1/5)$.

Lösning. Vi låter $H_0 : X \sim \text{Bin}(2, 1/5)$. Om vi antar att H_0 är sann så gäller att

$$P(X = 0) = \binom{2}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25},$$
$$P(X = 0) = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{8}{25},$$
$$P(X = 0) = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{25}.$$

Kom ihåg att kontrollera att dessa summerar till 1, det är en billig kontroll på tentan. Utifrån detta kan vi beräkna de förväntade frekvenserna vid 1250 försök (om H_0 är sann):

$$np_j = \begin{cases} 800, & j = 0, \\ 400, & j = 1, \\ 50, & j = 2. \end{cases}$$

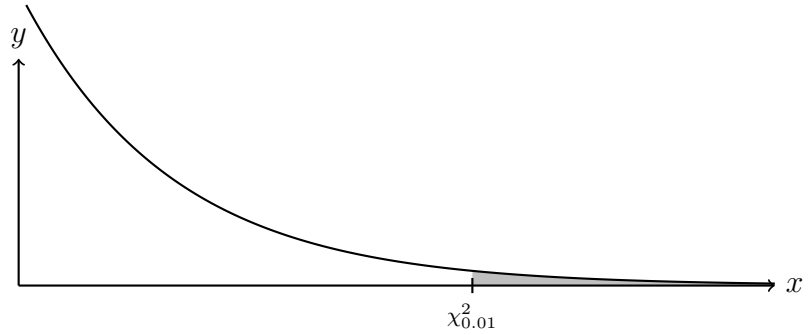
Testvariabeln q ges nu av

$$q = \sum_{j=0}^{2} \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j} = \frac{(783-800)^2}{800} + \frac{(425-400)^2}{400} + \frac{(42-50)^2}{50} \approx 3.2038.$$

Eftersom $k = 3$ är q en observation av $Q \overset{\text{appr.}}{\sim} \chi^2(2)$ om H_0 är sann. Vi finner att

$$0.01 = P(Q > \chi^2_{0.01}(2)) \quad \Leftrightarrow \quad \chi^2_{0.01}(2) = 9.21$$

ur tabell.



Eftersom $q = 3.2038 < 9.21$ kan vi inte förkasta H_0. Fördelningen kan mycket riktigt vara binomialfördelning med $p = 1/5$.

4 Test för kontinuerlig fördelning

Om vi istället har en kontinuerlig situation där vi vill testa om mätdata följer en given fördelning F måste vi agera lite annorlunda. Vi skulle önska att ställa upp

$$H_0 : X \sim F$$

mot

$$H_1 : X \text{ har ej fördelningen } F.$$

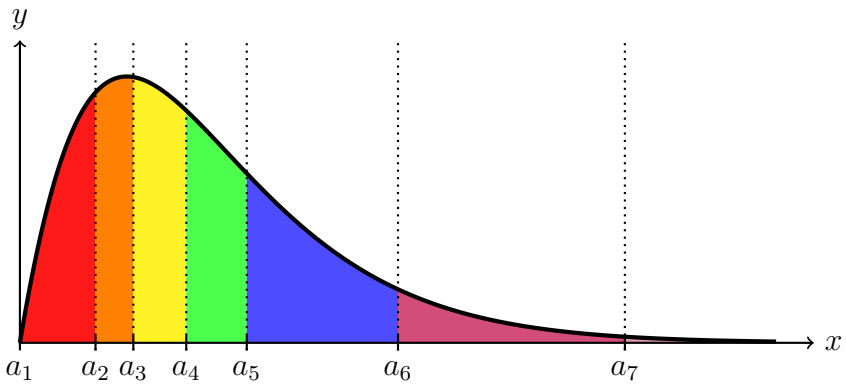
Men detta blir lite för komplicerat i det generella fallet.
Istället gör vi så att vi diskretiserar det hela på något sätt. Vi gör oftast detta genom att skapa lådor i form av intervall och sedan undersöka hur många observationer som hamnar i varje delintervall. Detta gör att vi inte exakt testar om nollhypotesen ovan utan vi testar en svagare nollhypotes.
Låt X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ vara oberoende och likafördelade variabler med täthetsfunktion $f(x)$. Vi väljer a_j, $j = 1, 2, \ldots, k+1$, så att

$$-\infty \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k < a_{k+1} \leq \infty$$

och definierar $A_j = [a_j,\ a_{j+1}[$ för $j = 2, 3, \ldots, k$ och låter typiskt $A_1 =]-\infty,\ a_2[$. Vi definierar sedan

$$p_j = P(X_i \in A_j) = \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\, dx.$$

Om f är en täthetsfunktion så blir nu $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$ och vi har täckt alla möjligheter. Om stödet för f inte är hela $\mathbf{R}$ modifierar vi naturligt definitionen (eller låter $f(x) = 0$ utanför sin definition). En tumregel för valet är att vi låter $k \approx n/10$. En annan tumregel är att välja intervallen så stora att alla p_j är ungefär lika stora.



Hypotesen vi kommer testa är

$$H_0 : P(X \in A_j) = p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

mot

$$H_1 : P(X \in A_j) \neq p_j \text{ för något } j.$$

Skulle X ha rätt fördelning kommer H_0 att vara sann med stor sannolikhet, men om vi styrker H_0 innebär det inte nödvändigtvis att det är just den fördelning vi utgick från när vi ställde upp A_j som är den sanna (bara någon med motsvarande sannolikheter i uppdelningen). Vill man ha ett starkare resultat krävs andra metoder.

Exempel

Säljaren på ELFA hävdar bestämt att livslängden på en komponent är exponentialfördelad med väntevärde 2 år. Uttråkade pensionären Sture tror inte på det utan köper 50 stycken komponenter för att testa. Sture kopplar upp komponenterna och kikar till var 6:e månad för att se hur många som gått sönder.

Tid (mån)	< 6	< 12	< 18	< 24	< 30	< 36	< 42	< 48	< 54	< 60
Antal:	11	19	25	31	36	39	39	40	42	43

Undersök om antagandet är rimligt på approximativt 1% nivån.

Lösning. Vi kan organisera om datan mer användbart enligt hur många enheter som gick sönder under en viss tidsenhet. För att få ungefär jämnstora klasser så buntar vi ihop enligt följande.

Tid	Hur många dog
$I_1 = [0,\ 6)$	11
$I_2 = [6,\ 12)$	8
$I_3 = [12,\ 24)$	12
$I_4 = [24,\ 36)$	8
$I_5 = [36,\ \infty)$	11

Om vi antar H_0 så gäller att täthetsfunktionen för livslängden hos en komponent X ges av $f(x) = \mu^{-1} \exp(-\mu^{-1} x)$, så

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) dx = \exp\left(-\frac{a}{\mu}\right) - \exp\left(-\frac{b}{\mu}\right).$$

Med siffrorna ovan ser vi att

$$P(X \in I_k) = \begin{cases} p_1 = 0.2212, & k = 1, \\ p_2 = 0.1723, & k = 2, \\ p_3 = 0.2387, & k = 3, \\ p_4 = 0.1447, & k = 4, \\ p_5 = 0.2231, & k = 5. \end{cases}$$

Teststorheten vi använder kommer nu ges av

$$q = \sum_{j=1}^{5} \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j} = \frac{(11 - 50 \cdot 0.2212)^2}{50 \cdot 0.2212} + \cdots + \frac{(11 - 50 \cdot 0.2231)^2}{50 \cdot 0.2231} = 0.1276.$$

Om H_0 är sann så kommer q vara en observation av $Q \overset{\text{appr.}}{\sim} \chi^2(5-1) = \chi^2(4)$, så med det kritiska området $C = (0,\ c)$ där $c = 13.28$, ser vi att vi inte kan förkasta H_0. Säljaren kan mycket väl ha rätt.

5 Skattade storheter

Normalt sätt kanske vi inte får exakt väntevärde (eller andra parametrar i fördelningen) utan dessa måste skattas innan vi kan utföra testet. Hur påverkar det fördelningen för teststorheten Q? Svaret är enkelt: för varje skattning vi gör tappar vi en frihetsgrad, under förutsättningen att skattningen är vettig (ML-skattningar brukar bete sig bra). Bevis är däremot lite bökigare (å andra sidan får vi det första χ^2-testet mer eller mindre på köpet). Får jag tid över kommer jag skriva ned det och uppdatera anteckningarna. Om vi antar att sannolikheterna p_j beror på okända $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1\ \theta_2\ \cdots\ \theta_r)^T$, så gäller alltså att

$$Q = \sum_{j=1}^{k} \frac{(Y_j - n\widehat{p}_j(\boldsymbol{\theta}))^2}{n\widehat{p}_j(\boldsymbol{\theta})} \overset{\text{appr.}}{\sim} \chi^2(k - r - 1),$$

under förutsättning att skattningarna som används beter sig tillräckligt bra.

Exempel

Linnea gör en signalbehandlingslaboration i matlab men hennes algoritm fungerar inte som planerat. Givetvis tycker Linnea att felet måste ligga i matlabs sätt att generera normalfördelade slumptal. För att testa hypotesen att slumptalen inte är normalfördelade genererar Linnea 1000 slumptal och sorterar dessa i storleksordning följt av en klassindelning så det är precis 100 element i varje klass. Gränserna kan ses nedan.

Undre gräns	1.57	12.47	15.00	17.04	18.80	20.33	21.76	23.26	25.00	27.43
Övre gräns	12.46	14.98	17.03	18.77	20.32	21.75	23.25	24.99	27.42	40.80

Det beräknade medelvärdet är $\overline{x} = 20.14$ och stickprovsvariansen är $s^2 = 35.25$. Testa på nivån 5% om värdena är normalfördelade.

Lösning. Låt H_0 : datan kommer från $N(\mu, \sigma^2)$ och H_1 : datan är inte normalfördelad. Om vi använder $\overline{x} = 20.14$ som skattning för väntevärdet och $s = \sqrt{35.25} = 5.94$ som skattning för standardavvikelsen, så kan vi (om vi antar att H_0 är sann) beräkna sannolikheterna för en normalfördelad variabel Z att hamna i de olika klasserna enligt

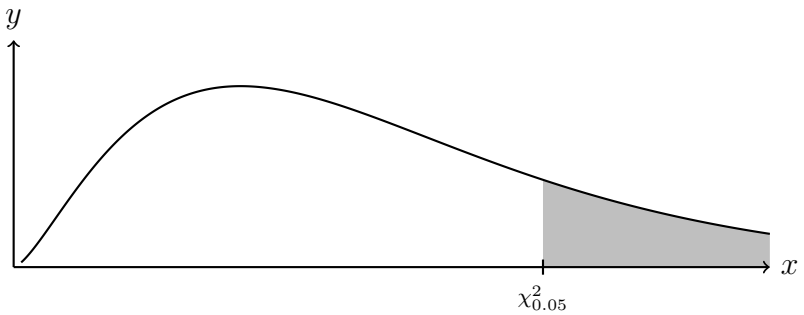
$$P(a \leq Z < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{Z-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$
$$\approx \Phi\left(\frac{b-20.14}{5.94}\right) - \Phi\left(\frac{a-20.14}{5.94}\right).$$

Resultatet kan beskådas nedan.

Intervall	Sannolikhet
$I_1 = (-\infty,\ 12.46)$	0.10
$I_2 = [12.47,\ 14.99)$	0.09
$I_3 = [15.00,\ 17.03)$	0.11
$I_4 = [17.04,\ 18.77)$	0.11
$I_5 = [18.78,\ 20.32)$	0.10
$I_6 = [20.33,\ 21.75)$	0.09
$I_7 = [21.76,\ 23.25)$	0.09
$I_8 = [23.26,\ 24.99)$	0.09
$I_9 = [25.00,\ 27.42)$	0.10
$I_{10} = [27.43,\ \infty)$	0.11

Vi ser redan nu att sannolikheterna väldigt nära hamnar runt 10-delar (vilket borde ske om normalfördelning gäller med tanke på konstruktionen). Men låt oss ställa upp teststorheten och se:

$$q = \sum_{j=1}^{10} \frac{(x_j - n\widehat{p}_j)^2}{n\widehat{p}_j} = \frac{(100 - 1000 \cdot 0.10)^2}{1000 \cdot 0.10} + \cdots + \frac{(100 - 1000 \cdot 0.11)^2}{1000 \cdot 0.11} = 4.34.$$



Om H_0 är sann så är q en observation av $\chi^2(10-2-1) = \chi^2(7)$ eftersom vi skattar två parametrar. På nivån 0.1% så gäller att $P(Q > 14.07) = 0.05$, och då $4.34 < 14.07$ så kan vi inte förkasta nollhypotesen. Linnea har antagligen implementerat sin algoritm fel.

Att testa normalfördelning på detta sätt är inte helt lämpligt. Det finns betydligt bättre metoder som till exempel Kolmogorov-Smirnovs metod som istället baserar sig på den empiriska fördelningsfunktionen. Test av denna typ ger bättre resultat i allmänhet.

6 Homogenitetstest

Det kan ofta vara intressant att avgöra om egenskaper skiljer sig åt mellan olika grupper. Låt oss sätta upp följande scenario. Vi har s stycken grupper eller serier av försök som vi är nyfikna på om de uppvisar samma sorts fördelning med avseende på en mängd egenskaper $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Vi kan då ställa upp datan enligt följande där siffrorna är absoluta frekvenser.

	Egenskap 1	Egenskap 2	$\cdots$	Egenskap r	Summa
Grupp 1	N_{11}	N_{12}	$\cdots$	N_{1r}	G_1
Grupp 2	N_{21}	N_{22}	$\cdots$	N_{2r}	G_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
Grupp s	N_{n1}	N_{n2}	$\cdots$	N_{nr}	G_s
Summa	E_1	E_2	$\cdots$	E_r	N

Om vi antar att grupperna är *homogena*, dvs att de uppvisar samma fördelning för egenskaperna, så är en bra skattning för sannolikheten p_j att ett objekt har egenskap j helt enkelt

$$\widehat{p}_j = E_j/N.$$

Vi formar samma sorts teststorhet som vi gjort innan

$$Q = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \frac{(N_{ij} - G_i \cdot \widehat{P}_j)^2}{G_i \widehat{P}_j} \overset{\text{appr.}}{\sim} \chi^2((r-1)(s-1)).$$

Att det blir just $(r-1)(s-1)$ kommer från de linjära restriktioner som trillar ut ur tabellen ovan. Vi kan se att

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{(N_{ij} - G_i \cdot p_j)^2}{G_i p_j} \overset{\text{appr.}}{\sim} \chi^2(r-1)$$

enligt tidigare argument, men då antar vi att p_j är kända. Sedan summerar vi s sådana oberoende variabler, så resultatet blir $\chi^2(s(r-1))$-fördelat. Men nu vill vi skatta p_j och för varje skattning tappar vi en frihetsgrad. Märk dock att vi inte skattar alla r stycken p_j, utan bara $r-1$ stycken då den sista ges av att summan måste bli ett. Vi tappar alltså $r-1$ frihetsgrader. Totalt sett har vi alltså $s(r-1) - (r-1) = (s-1)(r-1)$ frihetsgrader.
Så när gäller approximationen? Den gäller under förutsättning att $n_i\widehat{p}_j$ är stora. En rimlig tumregel är att $n_i\widehat{p}_j \geq 5$.

Exempel

Ifrån en stor population frågar vi två grupper om de tycker det borde vara lagligt att kasta tallkottar på hundägare som inte håller sina hundar kopplade.

Grupp	Kottkastning är OK!	Nej man får inte kasta tallkottar på folk.
G_1	59	41
G_2	145	55

Testa på signifikansnivån 1% (approximativt) om det finns någon skillnad mellan vad grupperna tycker.

Lösning. Vi utför ett homogenitetstest.

Grupp	Kottkastning är OK!	Nej man får inte kasta tallkottar på folk.	Summa
G_1	59	41	100
G_2	145	55	200
$G_1 + G_2$	204	96	300
$\widehat{p_j}$	0.68	0.32	1.0

Låt H_0 : Grupperna tycker likadant mot H_1 : Grupperna tycker olika. Vår observation av teststorheten ges av

$$q = \frac{(59-68)^2}{68} + \frac{(41-32)^2}{32} + \frac{(145-136)^2}{136} + \frac{(55-64)^2}{64} \approx 5.58.$$

Detta är en observation av $Q \overset{\text{appr.}}{\sim} \chi^2(1 \cdot 1)$. Ur tabell finner vi att $P(Q > 6.6349) = 0.01$. Eftersom $q < 6.6349$ så kan vi inte förkasta hypotesen att grupperna tycker lika.

Exempel

Alla som lyssnar på hårdrock i någon form har säkert funderat över vilken av Slayer-låtarna *Angel of Death* och *Raining Blood* som är bäst[a]. Examinator funderade över om resultaten är homogena över några olika grupper och samlade in följande siffror på internet:

	Angel of Death	*Raining Blood*
`Returntothepit.com`	199	173
`MetalStorm.net`	47	43
`RockBand.com`	21	16
`MetalRules.com`	23	3

Utför ett homogenitetstest på nivån 5% för att se om man kan förkasta hypotesen att åsikterna är likafördelade i de fyra olika grupperna.

[a] Självklart är *Angel of Death* den bästa av dessa två, men det är inte poängen!

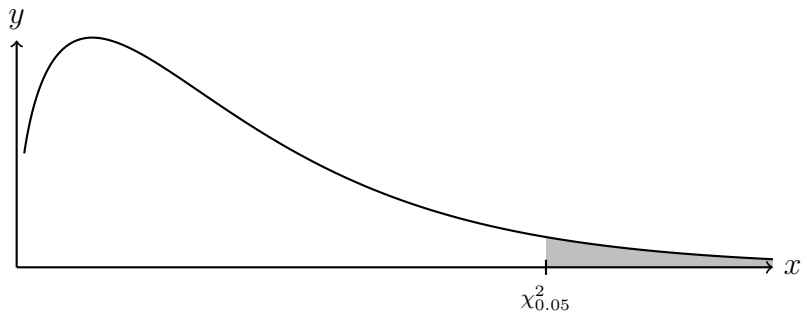
Lösning. Först kompletterar vi tabellen med all information som behövs:

	Angel of Death	*Raining Blood*	Summa (n_i)
`Returntothepit.com`	199	173	372
`MetalStorm.net`	47	43	90
`RockBand.com`	21	16	37
`MetalRules.com`	23	3	26
Summa	290	235	525
$\widehat{p_j}$ (skattat p_j)	$\widehat{p_1} = 0.552$	$\widehat{p_2} = 0.448$	1.00

Vi beräknar observationen q

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} \frac{(x_{ij} - n_i\widehat{p_j})^2}{n_i\widehat{p_j}} \\ &= \frac{(199-372\widehat{p_1})^2}{372\widehat{p_1}} + \frac{(173-372\widehat{p_2})^2}{372\widehat{p_2}} + \frac{(47-90\widehat{p_1})^2}{90\widehat{p_1}} + \frac{(43-90\widehat{p_2})^2}{90\widehat{p_2}} \\ &\quad + \frac{(21-37\widehat{p_1})^2}{37\widehat{p_1}} + \frac{(16-37\widehat{p_2})^2}{37\widehat{p_2}} + \frac{(23-26\widehat{p_1})^2}{26\widehat{p_1}} + \frac{(3-26\widehat{p_2})^2}{26\widehat{p_2}} \\ &= 12.43 \end{aligned}$$

Låt H_0 vara utsagan att favoriten bland de två låtarna är likadant fördelad i alla fyra serier. Det vill säga, att $P(\text{AoD favorit}) = p_1$ och $P(\text{RB favorit}) = p_2$ gäller i alla fyra serierna med samma sannolikheter p_j. Antag att H_0 är sann.



Vi förkastar H_0 om $Q > \chi^2_\alpha(3)$, d v s om den observerade testvariabeln hamnar utanför det skuggade området i figuren ovan. Med $\alpha = 0.05$ finner vi att $\chi^2_{0.05}(3) = 7.81$ (ur en tabell eller med matlab), så $Q > \chi^2_\alpha(3)$. Vi kan alltså förkasta hypotesen att alla grupperna tycker likadant (ganska tydligt från siffrorna att den fjärde raden skiljer sig markant från de andra).
Svar: Vi kan förkasta hypotesen om homogenitet på nivån 5%.