Föreläsning 2: Tillämpningar av Maclaurinutvecklingar

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

22 januari 2020

1 Entydighet

Om vi har ett polynom som approximerar en snäll funktion bra, kan vi då vara säkra på att koefficienterna i polynomet är Maclaurinkoefficienterna? Faktum är att vi faktiskt kan det!

Entydighet

Om f är $(n+1)$-gånger kontinuerligt deriverbar, dvs $f \in C^{n+1}$, och

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + O(x^{n+1})$$

så är $a_0 = f(0)$ och $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ för $k = 1, 2, \ldots, n$.

Bevisskiss: Maclaurinutvecklingen finns, så vi måste ha likheten

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + O(x^{n+1}) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^{n+1}).$$

Med $x = 0$ får vi $a_0 = f(0)$. Sen är det lockande att derivera för att bestämma a_1, men ordotermen är obehaglig då den inte behöver vara deriverbar. Men om vi utnyttjar att $a_0 = f(0)$ kan vi förkorta bort ett x överallt (även i ordo-termen):

$$a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + O(x^n) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1} + O(x^n).$$

Alltså är $a_1 = f'(0)$ och så vidare. Vi landar till slut i att

$$a_n + O(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + O(x),$$

där vi kan låta $x \to 0$.

2 Utvecklingar från derivatan

Om man vet en utveckling för derivatan $f'(x)$ kan man direkt hitta utvecklingen för $f(x)$ genom att betrakta integralkalkylens huvudsats: $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$.

Exempel

Härled Maclaurinutvecklingen för $\ln(1+x)$.

Lösning. Låt $f(x) = \ln(1+x)$. Som bekant ges derivatan av $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Vi kan utveckla denna som $(1+x)^{-1}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + r(x).$$

Vi stannar på $n-1$ av en anledning. Eftersom $f(0) = \ln 1 = 0$ så är

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x r(t)\,dt.$$

Resttermen då? I detta fall så ser vi att Maclaurinpolynomet är en geometrisk summa, så

$$r(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k = \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Alltså blir (för $x > 0$) $|r(x)| \leq x^n$. Vi kan nu uppskatta integralen av feltermen. Om $x \geq 0$ gäller att

$$\left|\int_0^x r(t)\,dt\right| \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} = O(x^{n+1})$$

eftersom $1 + x \geq 1$. När $x < 0$ måste vi minst kräva att $-1 < x < 0$ (varför?). Men vi kan göra det enklare för oss och helt enkelt anta att $|x| \leq 1/2$. Då är $1 + x \geq 1/2$ och $\dfrac{1}{1+x} \leq 2$. Liknande kalkyl som ovan ger oss $O(x^{n+1})$. Detta krävde ganska precis kunskap om resttermen, men det går att göra liknande argument även när vi inte har så enkla fall. Vi återkommer till detta i nästa föreläsning. Det finns även en sats i boken som implicerar resultatet ovan. Detta resultat är generellt användbart så låt oss formulera satsen.

Om $f \in C^1$ nära noll samt $f'(x) = O(x^p)$ för något heltal $p \geq 0$, så är $f(x) = O(x^{p+1})$ såvida $f(0) = 0$.

Observera här att vi absolut **inte** påstår att man kan derivera ordo-termen. Som formuleringen lyder så vet vi *a priori* att f' existerar.

3 Utvecklingar via ansatser

Om man studerar utvecklingarna för $\sin x$ och $\cos x$ ser man att den udda funktionen sin endast har udda exponenter och att den jämna funktionen cos endast har jämna exponenter. Detta gäller generellt för udda respektive jämna funktioner.

Exempel

Använd utvecklingen för $\sin x$ för att finna Maclaurinpolynomet av ordning 4 för $\arcsin x$.

Lösning. Vi vet att $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$, så arcsin är udda. Det innebär alltså att $\arcsin x = a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5)$. Vi söker a_1 och a_3. Nu vet vi att $\sin \arcsin x = x$ för $-1 \leq x \leq 1$ och eftersom $\sin x = x + x^3/6 + O(x^5)$ måste då

$$a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5) - \frac{(a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5))^3}{6} + O((a_1 x + a_3 x^3 + O(x^5))^5) = x.$$

Vänsterledet kan vi skriva om som

$$a_1 x + \left(a_3 - \frac{a_1^3}{6}\right) x^3 + O(x^5)$$

och för att detta ska vara lika med högerledet x måste alltså $a_1 = 1$ och $a_3 - a_1^3/6 = 0$. Med andra ord erhåller vi att

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + O(x^5).$$

Kontrollera detta genom att derivera $f(x) = \arcsin x$ direkt!

4 Gränsvärden

En vanlig tillämpning för Maclaurinutvecklingar är beräkning av gränsvärden.

Exempel

Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 + x^2}}{x^2}$.

Vi löser detta genom att Maclaurinutveckla $\cos x$ och $\sqrt{1 + x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \sqrt{1 + x^2}}{x^2} &= \frac{1 - x^2/2 + O(x^4) - (1 + x^2/2 + O(x^4))}{x^2} \\ &= \frac{x^2\,(-1 + O(x^2))}{x^2} = -1 + O(x^2) \to -1, \text{ då } x \to 0. \end{aligned}$$

Vi kan alltså Maclaurinutveckla uttryck istället för att memorera massvis med standardgränsvärden! Ofta är det också någon slags kancellation inblandad. Utvecklingar kan vara ett bra sätt att plocka bort beteende som är likadant i summor.

Exempel

Finn gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\ln(1 + x^3)}$.

Vi löser problemet analogt med föregående kalkyl:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{2}-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+O(x^5)}{x^3+O(x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3+O(x^5)}{x^3+O(x^6)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+O(x^2)}{1+O(x^3)}=-\frac{1}{3}.$$

5 Gränsvärden mot oändligheten

Vi behöver i fallet när vi söker ett gränsvärde mot oändligheten införa en ny variabel som går mot noll då $x\to\infty$. Den vanligaste tekniken vi använder är att bryta ut det som dominerar ur varje term och då få saker kvar som går mot noll. Dessa saker brukar ge lämplig ny variabel.

Exempel

Räkna ut gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[4]{x^2+x^4}-\sqrt{1+x+x^2}\right)$.

Lösning. Vi försöker bryta ut det som dominerar i varje term. I den första är det x^4-termen och i den andra x^2-termen. Således har vi

$$\sqrt[4]{x^2+x^4}-\sqrt{1+x+x^2}=|x|\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right)$$
$$=|x|\left(1+\frac{1}{4x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)+O\left(\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)^2\right)\right)\right)$$
$$=-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\to-\frac{1}{2},\text{ då } x\to\infty.$$

Här har vi använt $t=\frac{1}{x^2}$ och $s=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ som nya variabler.

6 Asymptoter

Exempel

Visa att $\sqrt{1-2x+4x^2}$ har en asymptot då $x\to\infty$.

Lösning. Vi visar detta genom att finna asymptoten (om den finns). Mot oändligheten är det x^2-termen som dominerar i kvadratroten, så vi börjar med att bryta ut denna

$$\sqrt{1-2x+4x^2}=2|x|\sqrt{\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}+1}.$$

Eftersom $x\to\infty$ kan vi anta att $|x|=x$. Låt nu $t=\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}$. Då gäller att $t\to 0$ då $x\to\infty$. Eftersom

$$\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t+O(t^2)$$

ser vi nu att

$$\sqrt{1-2x+4x^2} = 2x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}\right)+O\left(\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}\right)^2\right)\right) = 2x-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Observera här att

$$O\left(\left(\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}\right)^2\right) = O\left(\frac{1}{16x^4}-\frac{2}{8x^3}+\frac{1}{4x^2}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

så termer innehållande x^{-2} försvinner in i denna. Vi har nu visat att det finns en asymptot $2x-1/2$ då $x \to \infty$ eftersom $O(1/x) \to 0$ då $x \to \infty$.

7 Extrempunkter

En Maclaurinutveckling beskriver hur en funktion beter sig lokalt nära origo. Alltså borde denna information kunna användas för att undersöka om det finns ett lokalt max eller min i origo. Självklart borde samma sak kunna göras i andra punkter genom att använda lämplig Taylorutveckling i stället. Vi betraktar ett par exempel.

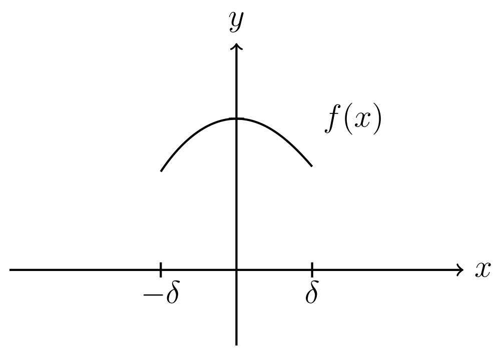
Exempel

Avgör om $\dfrac{\sin x}{x}$ har en lokal extrempunkt i origo och avgör om så är fallet vilken karaktär punkten har.

Lösning. Vi Maclaurinutvecklar $\sin x$ och finner då att

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{6}+O(x^4) = 1-x^2\left(\frac{1}{6}+O(x^2)\right).$$

När x är nära 0 ser vi att uttrycket i parentesen är $\approx \dfrac{1}{6}$. Funktionsvärdet i $x=0$ är 1 och om vi flyttar oss lite från $x=0$ så är funktionsvärdet strikt mindre än ett. Detta är definitionen av ett lokalt maximum! Mer precist innebär likheten ovan att det finns ett $\delta > 0$ så att $\dfrac{\sin x}{x} - 1 < 0$ för $0 < |x| < \delta$, se figuren till höger.



Exempel

Avgör om $2 + x\exp(x^2) - \tan x$ har en lokal extrempunkt i origo och avgör om så är fallet vilken karaktär punkten har.

Lösning. Vi utvecklar uttrycket:

$$\begin{aligned}
2 + x\exp(x^2) - \tan x &= 2 + x\left(1 + x^2 + O(x^4)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)\right) \\
&= 2 + x^3 - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \\
&= 2 + x^3\left(\frac{2}{3} + O(x^2)\right).
\end{aligned}$$

Här ser vi att uttrycket är större än 2 när $x > 0$ (men nära noll) och mindre än 2 när $x < 0$ (men nära noll) eftersom x^3 växlar tecken. Detta är således varken en max- eller minpunkt eftersom ingen av dessa definitioner är uppfylld. Formellt innebär det att för varje (litet) $\delta > 0$ har funktionen utseendet till höger. Är detta en så kallad terasspunkt?