Föreläsning 4: Taylorutvecklingar – en återblick

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

11 mars 2020

1 Taylorpolynom

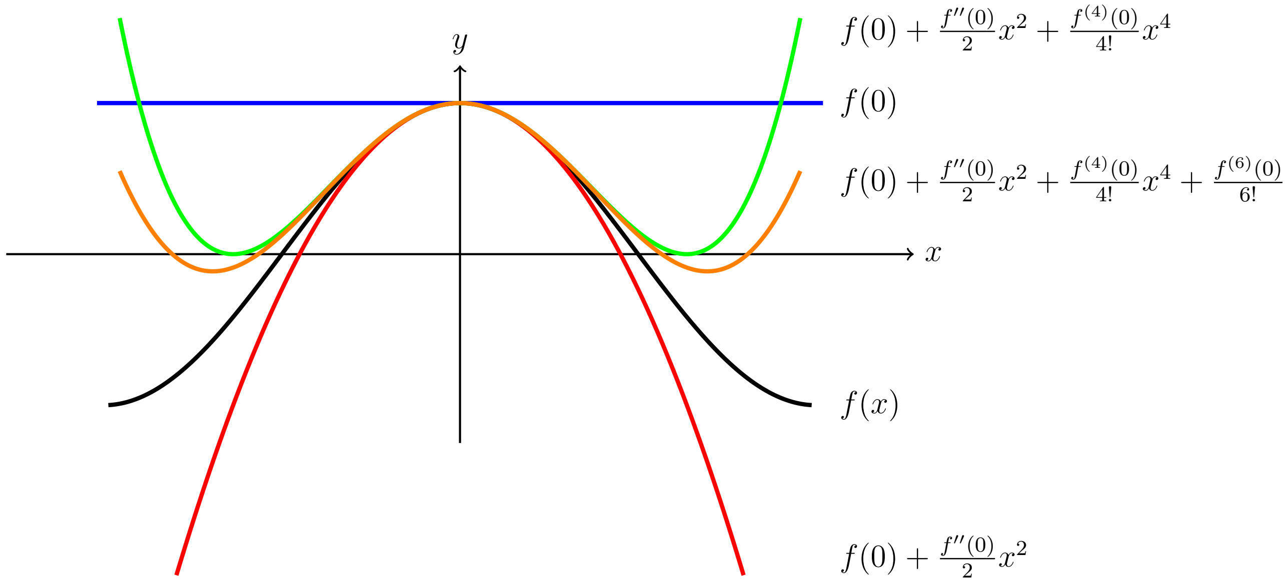
Låt en funktion f vara ”snäll” (säg C^{n+1}) i en omgivning (dvs något intervall) av en punkt $x = a$. Vi har då visat att man kan approximera funktionen f med ett polynom p enligt

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + r(x) \\ &= \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{approximation}} + \underbrace{f(x) - p(x)}_{\text{fel}}. \end{aligned}$$

Polynomet

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

kallas Taylorpolynomet av ordning n (eller Maclaurin-polynomet om $a = 0$). Formeln kan alltid användas direkt, men ibland finns genvägar genom att till exempel använda så kallade standardutvecklingar och ibland kan symmetri hos en funktion göra att vissa koefficienter är lättbestämda. Exempelvis en jämn funktion kommer endast att ha jämna termer (varför?).



2 Resttermen

Felet $r(x) = f(x) - p(x)$ kallas för *resttermen*. Notera att resttermen och Taylor-polynomet har vissa karakteristika drag.

(i) Felet $r(x)$ är litet när $x \approx a$. Kontrollera att detta är sant vid användning!

(ii) Fler termer i $p(x) \Rightarrow$ polynomet stämmer bättre överens med funktionen nära a.

(iii) Felet beror på både x och gradtalet n (och självklart funktionen f och a).

(iv) $r(a) = r'(a) = r''(a) = \cdots = r^{(n-1)}(a) = r^{(n)}(a) = 0$

Lagranges restterm på integralform:

$$r(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Resttermen på ”Lagranges form”:

$$r(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \text{ mellan } a \text{ och } x.$$

Resttermen på ”ordo-form”:

$$r(x) = O((x-a)^{n+1}).$$

Kom ihåg hur vi definierade $O(x^n)$.

Stora ordo

Definition. Vi säger att $f(x) = O(x^n)$ då x är nära noll om det finns en begränsad funktion $B(x)$ så att $f(x) = B(x)x^n$ för x nära noll.

Egenskaper för stora ordo

För x nära noll och $m, n \geq 0$ gäller:

(i) $O(x^n) \pm O(x^m) = O(x^m)$ om $m \leq n$ (”lägst vinner”);

(ii) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})$;

(iii) Om $f(x) = O(x^n)$ och $m \leq n$ så är $f(x) = O(x^m)$ (vi kan *sänka* exponenten);

(iv) $B(x)O(x^n) = O(x^n)$ om $B(x)$ är begränsad;

(v) $O(x^m)^n = O(x^{mn})$ och $O((O(x^m))^n) = O(x^{mn})$;

(vi) $O(x^n) \to 0$ då $x \to 0$ om $n > 0$.

Exempel

Finn Taylorutvecklingen för $\ln(1+2x)$ kring $x = 1/3$ av ordning 1 med restterm på ordo-form.

Lösning. Låt $f(x) = \ln(1+2x)$. Då är

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+2x} = \frac{2}{1+2x}.$$

Vi söker utvecklingen kring $x = 1/3$, så

$$f(1/3) = \ln\left(\frac{5}{3}\right), \quad f'(1/3) = \frac{2}{2+5/3} = \frac{6}{5}.$$

Enligt satsen om Taylorutvecklingar ser vi att

$$\ln(1+2x) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{6}{5}\left(x - \frac{1}{3}\right) + O\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\right).$$

3 När använder vi de olika formerna?

Beroende på vad vi vill åstadkomma så väljer vi mellan ordo-form och Lagranges form på resttermen.

3.1 Lokala egenskaper

Egenskaper som är lokala till sin natur, såsom gränsvärden, kontinuitet, max/min etc, kan ofta undersökas med resttermen på ordoform.

Exempel

Hitta Maclaurinutvecklingen för $\sqrt{\cos 2x}$ med resttermen $O(x^8)$.

Lösning. Enligt standardutvecklingar så gäller att

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + O(t^4)$$

och

$$\cos s = 1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4!}s^4 - \frac{1}{6!}s^6 + O(s^6).$$

Således blir

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos 2x} = \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + O(x^8)\right)^{1/2} &= \left(1 \underbrace{-2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + O(x^8)}_{=t}\right)^{1/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + O(x^8)\right) - \frac{1}{8}\left(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} + O(x^6)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{16}\left(-2x^2 + O(x^4)\right)^3 + O(O(x^2)^4) \\
&= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + O(x^8) - \frac{1}{8}\left(4x^4 - \frac{8x^6}{3} + O(x^8)\right) + \frac{1}{16}\left(-8x^6 + O(x^8)\right) + O(x^8) \\
&= 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{19}{90}x^6 + O(x^8)
\end{aligned}$$

Exempel

Avgör om $g(x) = x^2 + \sqrt{\cos 2x}$ har ett extremvärde i origo och om så är fallet, vad dess karaktär är.

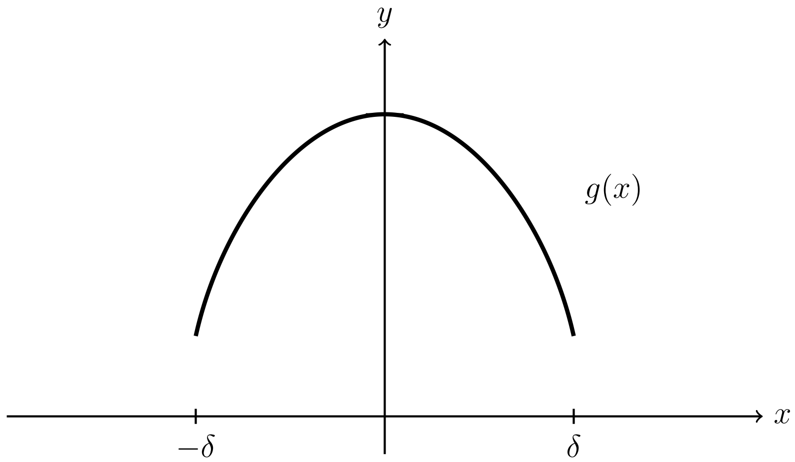
Lösning. Från ovan ser vi att

$$g(x) = x^2 + \sqrt{\cos 2x} = x^2 + 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + O(x^6) = 1 - x^4\left(\frac{1}{6} + O(x^2)\right),$$

vilket innebär att det finns en (möjligtvis liten) omgivning $]-\delta,\delta[$ så att $\frac{1}{6} + O(x^2) > 0$ för $-\delta < x < \delta$. För sådana x gäller alltså att

$$g(x) - 1 = -x^4\left(\frac{1}{6} + O(x^2)\right) \leq 0$$

med likhet endast då $x = 0$. Således är $x = 0$ en maxpunkt.



Exempel

Finn gränsvärdet (om det existerar) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan \sin^2 x - \tan x^2}{x^2 \ln(1+x^2)}$.

Lösning. Låt $t = \sin^2 x$. Då är

$$t = \left(x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + O(x^6)$$

och därmed är

$$\arctan t = t + O(t^3) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + O(x^6) + O\left((x^2 + O(x^4))^3\right) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + O(x^6).$$

Vidare är

$$\tan x^2 = x^2 + O(x^6)$$

och

$$x^2\ln(1+x^2) = x^2(x^2 + O(x^4)) = x^4 + O(x^6).$$

Vi har alltså

$$\frac{\arctan \sin^2 x - \tan x^2}{x^2\ln(1+x^2)} = \frac{x^2 - \frac{2x^4}{3!} - x^2 + O(x^6)}{x^4 + O(x^6)} = \frac{-\frac{2}{3!} + O(x^2)}{1 + O(x^2)} \to -\frac{2}{3!} = -\frac{1}{3}.$$

3.2 Globala egenskaper

När vi söker beteende för en funktion på ett intervall behöver vi använda Lagranges form på resttermen:

$$r(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \text{ mellan } a \text{ och } x.$$

Denna situation är typiskt när vi vill ha uppskattningar av ett funktionsvärde i en annan punkt än vi utvecklar i, när vi vill ha uppskattningar som gäller på ett helt intervall, eller när vi vill uppskatta en integral genom att utveckla integranden.
Kom ihåg följande!

(i) ξ är INTE konstant!

(ii) ξ kan vara negativ!

(iii) Att uppskatta $f^{(n)}(\xi)$ är ett maximum-problem på något intervall $[a, b]$. Märk att vi oftast inte behöver hitta det exakta värdet utan att vi kan göra ganska grova uppskattningar för att slippa besvärliga uppskattningar.

Exempel

Låt $f(x) = \ln(1 + x^2) + 2 \arctan x$. Visa att $|f(x) - x| \leq x^2$ då $|x| \leq 1$.

Lösning. Vi ser att

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(1+x)}{1+x^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2},$$

så

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}\frac{1-2\xi-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}x^2 = x + \frac{1}{2}\frac{1-2\xi-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}x^2,$$

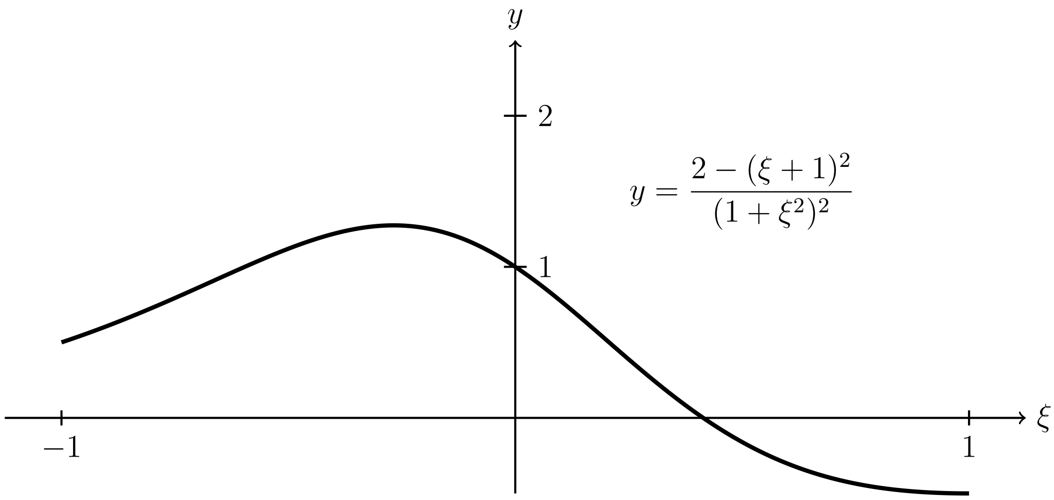
för något ξ mellan 0 och x. Alltså kommer

$$|f(x) - x| \leq \left|\frac{1}{2}\frac{1-2\xi-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}\right| = \frac{1}{2}\frac{|2-(\xi+1)^2|}{(1+\xi^2)^2}.$$

Notera att $\left|2-(\xi+1)^2\right| \leq 2$ för $-1 \leq \xi \leq 1$ och att $1 + \xi^2 \geq 1$ för alla ξ, vilket innebär att

$$\frac{|2-(\xi+1)^2|}{(1+\xi^2)^2} \leq \frac{2}{1^2} = 2$$

då ξ ligger mellan 0 och x, så $|\xi| \leq 1$ eftersom $|x| \leq 1$. Notera att det inte finns något ξ som gör att bråket blir just 2



Exempel

Visa att $\displaystyle\int_0^{1/4} \arcsin(\sqrt{t})\,dt \approx \frac{1}{12}$ med ett fel $\leq 1/140$.

Lösning. Låt $f(s) = \arcsin(s)$. Då gäller att

$$f'(s) = (1-s^2)^{-1} \quad \text{och} \quad f''(s) = \frac{s}{(1-s^2)^{3/2}}.$$

Alltså blir

$$\arcsin(s) = f(0) + f'(0)s + \frac{f''(\xi)}{2}s^2 = s + \frac{\xi}{2(1-\xi^2)^{3/2}}s^2, \quad \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } s,$$

så

$$\arcsin(\sqrt{t}) = \sqrt{t} + \frac{\xi}{2(1-\xi^2)^{3/2}}t, \quad \xi \text{ mellan } 0 \text{ och } \sqrt{t}.$$

Eftersom vi är intresserade av när $0 \leq t \leq 1/4$, så kommer $0 \leq \xi \leq 1/2$. Alltså blir

$$\left|\frac{\xi}{2(1-\xi^2)^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-1/4)^{3/2}} = \frac{4^{3/2}}{4\cdot 3^{3/2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} < \frac{4}{9}$$

då $\sqrt{3} > 3/2$. Det följer att

$$\int_0^{1/4} \arcsin(\sqrt{t})\,dt = \int_0^{1/4} \sqrt{t}\,dt + R = \frac{1}{12} + R,$$

där

$$|R| = \left|\int_0^{1/4} \frac{\xi}{2(1-\xi^2)^{3/2}}\,t\,dt\right| \leq \frac{4}{9}\int_0^{1/4} t\,dt = \frac{4}{9}\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^{1/4} = \frac{1}{9\cdot 16} = \frac{1}{144}.$$

Notera att det går att räkna ut integralen exakt (hur?) utan större problem (med exakta svaret $\sqrt{3}/8 - \pi/24$).