Föreläsning 7: Linjära differentialekvationer av högre ordning II

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

5 mars 2020

1 Olika typer av partikulärlösningar

Så för vissa typer av högerled kan vi hitta generella metoder för att hitta en partikulärlösning.

1.1 Polynom

Om högerledet består av ett polynom

$$p(D)y = q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ansätter vi ett annat polynom som har minst samma grad som $q(x)$. Hur hög grad som behövs har att göra med hur $p(D)$ ser ut. Ansatsen är naturlig eftersom derivatan av polynom är polynom.

Exempel

Hitta en partikulärlösning till $2y'' + y' - y = 3x + 1$

Lösning. Vi ansätter $y_p(x) = Ax + B$ eftersom vi vill matcha ett första-grads polynom. Då är $y'' = 0$ och $y' = A$, så

$$A - (Ax + B) = 3x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad A - B = 1 \text{ och } A = -3 \quad \Leftrightarrow \quad A = -3 \text{ och } B = -4.$$

Partikulärlösningen ges alltså av $y_p(x) = -3x - 4$. Kontrollera att detta fungerar!
Om vissa termer ”saknas” i $p(D)$ kan vi komma undan med enklare ansatser.

Exempel

Hitta en partikulärlösning till $y'' + 2y' = 3x + x^2$.

Lösning. Vi vill matcha grad 2, men ser i HL att konstant saknas och att det i VL saknas y-term. Alltså ansätter vi $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ och ser att

$$6Ax + 2B + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = 3x + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6A = 1, \\ 6A + 4B = 3, \\ 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Alltså måste $A = 1/6$, $4B = 2$ så $B = 1/2$, och $C = -B = -1/2$. Vår partikulärlösning är alltså

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}.$$

Vad händer om vi gör fel ansats? Det blir inte värre än att vi hamnar i en situation där vi inte kan bestämma konstanterna. Tänk till exempel om vi inte tar med Cx-termen i ansatsen ovan. Då blir den sista ekvationen $2B = 0$, så $B = 0$. Men då är både $6A = 3$ och $6A = 1$ vilket så klart inte går. Hamnar vi här får vi göra om ansatsen! Hur? Lägg till fler termer om du inte kommer på något bättre.

1.2 Exponentialfunktioner

Uttryck innehållande exponentialfunktioner e^{ax} (a kan vara komplex) kan transformeras med ansatsen $z(x)e^{ax}$ vilket normalt sett reducerar fallet till något enklare. Eftersom vi återfår funktionen e^{ax} efter alla deriveringar (inte förvånande egentligen) så kan vi förkorta bort denna när den förekommer i alla termer i högerledet (eftersom $e^{ax} \neq 0$). Detta reducerar problemet till något som är enklare att hantera.

Exempel

Hitta alla lösningar till $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.

Lösning. Vi vet att $p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1)$. Den homogena delen får vi direkt från faktoriseringen i form av $y_h(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x$. För att finna en partikulärlösning y_p sådan att $p(D)y_p = xe^{2x}$, så känns ansatsen $y_p = z(x)e^{2x}$ lämplig. Direkt derivering ger att

$$y_p' = (z' + 2z)e^{2x} \quad \text{och} \quad y_p'' = (z'' + 2z' + 2z' + 4z)e^{2x},$$

vilket medför att

$$p(D)(ze^{2x}) = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x} - 3(z' + 2z)e^{2x} + 2ze^{2x} = (z'' + z')e^{2x}.$$

Om detta ska bli xe^{2x} måste alltså $z'' + z' = x$. Vi söker **en** lösning, så vi ansätter därför att $z(x) = Ax^2 + Bx$, vilket ger

$$2A + 2Ax + B = x \quad \Leftrightarrow \quad 2A + B = 0 \text{ och } 2A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2} \text{ och } B = -1.$$

Vi får alltså $y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}$. Samtliga lösningar ges alltså av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x}.$$

1.3 Sinus och cosinus

Dessa kan behandlas på olika sätt. En variant är att betrakta dem som real- respektive imaginärdel av en komplex exponentialfunktion. Alternativt ansätts en linjärkombination av sinus och cosinus med samma frekvens som i högerledet. Dessa alternativ kan behöva modifieras om ansatsen matchar de homogena lösningarna.

> **Exempel**
>
> Finn alla lösningar till $y'' + y' - 6y = 2\sin 2x$.

Lösning. Låt $p(r) = r^2 + r - 6$. De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

eftersom $p(r) = 0$ har lösningarna $r = 2$ och $r = -3$ och faktoriseringen $p(r) = (r-2)(r+3)$. Vi vill ha ut $2\sin 2x$, så det är rimligt att ansätta en partikulärlösning av formen

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x$$

eftersom den typen av funktioner dyker upp när man deriverar. Vi räknar ut vad som händer med ansatsen:

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 6A\sin 2x - 6B\cos 2x = 2\sin 2x.$$

Vi matchar $\sin 2x$-termer och $\cos 2x$-termer och finner att

$$-4A - 2B - 6A = 2 \text{ och } -4B + 2A - 6B = 0.$$

Alltså är $A = -5/26$ och $B = -1/26$. Vi har därmed

$$y_p(x) = -\frac{5}{26}\sin 2x - \frac{1}{26}\cos 2x.$$

Den fullständiga lösningen ges av

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{5}{26}\sin 2x - \frac{1}{26}\cos 2x.$$

Låt oss upprepa en uppmaning från förra föreläsningen.

> **Villkor på lösningar**
>
> Observera att **hela** lösningen $y = y_h + y_p$ måste bestämmas innan några villkor sätts in för att finna konstanterna i y_h. Detta kan **inte** göras direkt på homogenlösningen.

> **Exempel**
>
> Finn alla lösningar till $y''' - 4y'' + 5y' = 12\cos 3x$ så att $y'(0) = 0$, $y(0) = y(2\pi) = 2$.

Lösning. Låt $p(r) = r^3 - 4r^2 + 5r$. Vi ser att

$$p(r) = r(r^2 - 4r + 5) = r(r - (2 - i))(r - (2 + i)).$$

De homogena lösningarna ges av

$$y_h(x) = C_1 + e^{2x}\left(C_2 \sin x + C_3 \cos x\right).$$

Vi vill ha ut $\cos 3x$, så det är rimligt att ansätta en partikulärlösning av formen

$$y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$$

eftersom den typen av funktioner dyker upp när man deriverar. Vi räknar ut vad som händer med ansatsen:

$$\begin{aligned} p(D)y_p = & -27A \cos 3x + 27B \sin 3x - 4(-9A \sin 3x - 9B \cos 3x) + 5(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) \\ = & \, (-12A + 36B) \cos 3x + (36A + 12B) \sin 3x. \end{aligned}$$

Vi matchar $\sin 2x$-termer och $\cos 2x$-termer och finner att

$$-12A + 36B = 12 \text{ och } 36A + 12A = 0.$$

Alltså är $A = -1/10$ och $B = 3/10$. Vi har alltså

$$y_p(x) = -\frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

Den fullständiga allmänna lösningen ges av

$$y = C_1 + e^{2x}\left(C_2 \sin x + C_3 \cos x\right) - \frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

Vi ska nu (inte tidigare) bestämma konstanterna. Vi har

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_3 + 3/10, \\ y(2\pi) = C_1 + e^{4\pi} C_3 + 3/10. \end{cases}$$

Om $y(0) = y(2\pi)$ måste alltså $C_3 = 0$. Sen är $y(0) = y(2\pi) = 2$, så $C_1 = 2 - 3/10 = 17/10$. Nu behöver vi derivera lite:

$$y'(x) = e^{2x}\left((2C_2 - C_3) \sin x + (C_2 + 2C_3) \cos x\right) - \frac{3}{10} \cos 3x - \frac{9}{10} \sin 3x$$

så $y'(0) = C_2 + 2C_3 - 3/10 = 0$ men $C_3 = 0$ så $C_2 = 3/10$. Svaret blir nu

$$y(x) = \frac{17}{10} + \frac{3}{10} e^{2x} \sin x - \frac{1}{10} \sin 3x + \frac{3}{10} \cos 3x.$$

1.4 Superposition

Superpositionsprincipen är principen att lösningar till linjära ekvationer kan konstrueras genom att addera lösningar till delproblem. Med andra ord, om y_1 löser $p(D)y_1 = g_1$ och y_2 löser $p(D)y_2 = g_2$ så kommer $y = y_1 + y_2$ att lösa $p(D)y = g_1 + g_2$; med andra ord: vi kan alltså lösa en del av problemet i taget. Anledningen till att detta är sant är helt enkelt linjäriteten hos ekvationen. Låt $y = y_1 + y_2$. Då gäller att

$$p(D)y = p(D)(y_1 + y_2) = p(D)y_1 + p(D)y_2 = g_1 + g_2.$$

Detta är en mycket användbar egenskap. Generellt så gäller följande.

Superposition av partikulärlösningar

Om

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$$

består av flera termer kan även partikulärlösningen delas upp i flera delar:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

enligt superpositionsprincipen och sedan kan man lösa varje $p(D)y_{p_k} = g_k$ och summera

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

för att finna en total partikulärlösning. Vi återkommer med exempel på detta senare.

Exempel

Finn alla lösningar till $y' + 3y = 2e^{-3x} + 34\sin 5x$.

Lösning. Ekvationen är linjär och av ordning 1, så vi skulle kunna använda integrerande faktor. Men då ekvationen har konstanta koefficienter kan vi även använda den teori vi nu tagit fram. Det karakteristiska polynomet ges av $p(r) = r + 3$, så $y_h = Ce^{-3x}$ är de homogena lösningarna. För att hitta en partikulärlösning delar vi upp i två delar och utnyttjar superpositionsprincipen. Vi sökert y_1 och y_2 så att $p(D)y_1 = e^{-3x}$ och $p(D)y_2 = \sin 5x$. Vi ansätter $y_1 = Axe^{-3x}$ (varför?) och $y_2 = a\cos 5x + b\sin 5x$. Då gäller att

$$y_1' + 3y_1 = Ae^{-3x}(1-3x) + 3Axe^{-3x} = e^{-3x}(A - 3Ax + 3Ax) = Ae^{-3x},$$

så $A = 2$ och

$$y_2' + 3y_2 = -5a\sin 5x + 5b\cos 5x + 3a\cos 5x + 3b\sin 5x,$$

så $3b - 5a = 34$ och $3a + 5b = 0$, vilket ger att $a = -5$ och $b = 3$. Det slutgiltiga svaret blir då

$$y(x) = Ce^{-3x} + 2e^{-3x} - 5\cos 5x + 3\sin 5x.$$

2 Förskjutningsregeln

Förskjutningsregeln

Sats. Om $a \in \mathbf{C}$ är en konstant och $p(D)$ är en DO med konstanta koefficienter så gäller att

$$p(D)\left(e^{ax}z(x)\right) = e^{ax}p(D+a)z(x).$$

Bevis. Polynomet $p(r)$ kan alltid faktoriseras (med eventuellt komplexa rötter) som

$$p(r) = C(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n).$$

Vi skriver

$$p(D) = C(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n).$$

Det räcker alltså att visa förskjutningssatsen för en av dessa faktorer eftersom vi iterativt kan förflytta oss genom hela polynomet i så fall. Vi väljer $D - r_i$. Då är

$$\begin{aligned}(D - r_i)\left(e^{ax}z(x)\right) &= \left(e^{ax}z(x)\right)' - r_i e^{ax}z(x) \\ &= e^{ax}z'(x) + ae^{ax}z(x) - r_i e^{ax}z(x) \\ &= e^{ax}\left((D + a) - r_i\right)z(x).\end{aligned}$$

Operatorn D förskjuts alltså med a i den i:te faktorn och detta gäller för varje i.

Exempel

Låt $p(r) = r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2)$. Då medför förskjutningsregeln att

$$p(D)\left(e^{-2x}z(x)\right) = e^{-2x}p(D - 2)z.$$

Så vad innebär $p(D - 2)$? Inget mer än att man ersätter r med $D - 2$ i polynomet $p(r)$:

$$p(D - 2) = (D - 2)^2 + (D - 2) - 2 = (D - 2 - 1)(D - 2 + 2) = (D - 3)D = D^2 - 3D.$$

Alltså blir

$$p(D)\left(e^{-2x}z(x)\right) = e^{-2x}p(D - 2)z = e^{-2x}\left(z'' - 3z'\right).$$

Kanske kan man tycka att det verkar bökigt med förskjutningsregeln, men i vissa fall underlättar den riktigt ordentligt.

Exempel

Låt $p(r) = (r - 3)^{10}$. Då kommer

$$\begin{aligned}p(D)(e^{3x}z(x)) = \big(&D^{10} - 30\,D^9 + 405\,D^8 - 3240\,D^7 + 17010\,D^6 - 61236\,D^5 + 153090\,D^4 \\ &- 262440\,D^3 + 295245\,D^2 - 196830\,D + 59049\big)\left(e^{3x}z(x)\right).\end{aligned}$$

Hur förenklar vi detta? Ser bökigt ut. Men med förskjutningsregeln blir

$$p(D)(e^{3x}z(x)) = e^{3x}p(D + 3)z = e^{3x}(D + 3 - 3)^{10}z = e^{3x}D^{10}z = e^{3x}z^{(10)}.$$

Betydligt mycket mindre arbete! Multipla rötter som ”krockar” med konstanten a i exponenten i e^{ax} brukar hanteras mycket enklare med förskjutningsregeln.

Exempel

Finn alla lösningar till $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet ges av $p(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1$ vilket vi känner igen från Pascals triangel, så $p(r) = (r-1)^3$ (visa detta). Alltså är

$$y_h = \left(Ax^2 + Bx + C\right) e^x$$

enligt satsen ovan. Testa att $p(D)y_h = 0$. Vi ser även att lösningarna till den homogena ekvationen krockar med högerledet så det räcker inte med en enkel ansats (detta fenomen brukar kallas *resonans*). Vi ansätter därför $y_p = z(x)e^x$. Förskjutningsregeln ger att

$$p(D)\left(z(x)e^x\right) = 2e^x \quad \Leftrightarrow \quad e^x p(D+1)z = 2e^x \quad \Leftrightarrow \quad p(D+1)z = 2 \quad \Leftrightarrow \quad D^3 z = z^{(3)} = 2$$

Vi söker **en** partikulärlösning z_p, så vi tar helt enkelt $z_p = \dfrac{2x^3}{6} = \dfrac{x^3}{3}$. Testa att detta fungerar! Vår eftersöka partikulärlösning ges nu av $y_p = \dfrac{x^3}{3}e^x$. Totalt sett har vi

$$y = y_h + y_p = \left(\frac{x^3}{3} + Ax^2 + Bx + C\right) e^x.$$

Modifierad ansats

Om högerledet "krockar" med de homogena lösningarna kan man komma undan med att modifiera ansatsen genom att multiplicera med x^k där k är multipliciteten för roten till det karakteristiska polynomet som orsaker konflikten. Exempelvis ser vi i föregående exempel att e^x krockar med en homogen lösning eftersom $r = 1$ är en rot till $p(r)$. Dessutom är detta en trippelrot så vi måste ansätta $y_p(x) = Ax^3$ för att hitta en partikulärlösning. Om vi betraktar y_h ser vi att vi måste "ta oss förbi" dessa termer av grad ≤ 2. Med ansatsen $y_p(x) = z(x)e^x$ sker detta automatiskt så denna metod är lite enklare.

Exempel

Lös ekvationen $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$.

Lösning. Låt

$$p(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = (r+i)^2(r-i)^2.$$

Alltså ges de homogena lösningarna till $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = (C_1 x + C_2)\cos x + (C_3 x + C_4)\sin x.$$

Vi ser nu att vi får problem med ansatsen för högerledet eftersom $\sin x$ är en lösning till den homogena ekvationen. Att bara multiplicera med x hjälper inte heller eftersom även $x \sin x$ är en homogen lösning! Vår ansats blir

$$y_p = Ax^2 \sin x + Bx^2 \cos x.$$

Vi deriverar lite och finner att

$$\begin{aligned}
p(D)y_p = & -12A\sin x - 8Ax\cos x + Ax^2\sin x - 12B\cos x + 8Bx\sin x + Bx^2\cos x \\
& + 2\left(2A\sin x + 4Ax\cos x - Ax^2\sin x + 2B\cos x - 4Bx\sin x - Bx^2\cos x\right) \\
& + Ax^2\sin x + Bx^2\cos x \\
= & -8A\sin x - 8B\cos x.
\end{aligned}$$

Alltså måste $A = -1/8$ och $B = 0$. Vi har nu alltså

$$(C_1x + C_2)\cos x + (C_3x + C_4)\sin x - \frac{x^2\sin x}{8}.$$

Alternativt kan vi betrakta ”hjälpekvationen”

$$w^{(4)} + 2w'' + w = e^{ix}$$

och sedan ta $y(x) = \operatorname{Im} w(x)$ för att hitta samma svar som ovan. Med fördel använder man här förskjutningssatsen när man finner en partikulärlösning med ansatsen $w_p(x) = z(x)e^{ix}$.

Exempel

Lös ekvationen $y^{(6)} - 64y = 32$.

Lösning. Det karakteristiska polynomet blir $p(r) = r^6 - 64$ som har rötterna

$$r = 2\exp\left(i\frac{\pi k}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Jämför med ekvationen $z^6 = 64$ från Grunken! Alltså ges lösningarna till den här ekvationen av

$$y_h = \sum_{k=0}^{5} C_k \exp\left(2\exp\left(i\frac{\pi k}{3}\right)x\right).$$

En partikulärlösning finner vi genom att ansätta $y_p = A$ och se att $-64A = 32$, eller ekvivalent, att $A = -1/2$, så enligt superpositionsprincipen har vi

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{5} C_k \exp\left(2\exp\left(i\frac{\pi k}{3}\right)x\right).$$

Vi kan formulera om detta på reell form (med andra konstanter C_i):

$$\begin{aligned}
y(x) = & -\frac{1}{2} + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \exp\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)\left(C_3\cos\frac{2x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) \\
& + \exp\left(-\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)\left(C_5\cos\frac{2x}{\sqrt{2}} + C_6\sin\frac{2x}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

3 Ekvationer med icke-konstanta koefficienter

Vi avslutar med en typ av ekvation där vi har koefficienter som beror av x på ett speciellt sätt, nämligen de så kallade Eulerekvationerna. Dessa har formen

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = g(x),$$

så vi ser att varje derivata av ordning k har koefficienten $a_k x^k$. Denna speciella ekvation kan vi lösa genom att byta variabel till $t = \ln x$. Det verkar rimligt eftersom $t' = 1/x = x^{-1}$ och varje gång vi deriverar t sänks exponenten ett steg till, vilket borde kunna kompensera för x^k före $y^{(k)}$. Man kan visa att detta alltid reducerar ekvationen till en ekvation för en funktion $z(t) = y(e^t)$ som har konstanta koefficienter (och därför kan lösas med tidigare tekniker). Vi visar ett par steg. Första derivatan fås enkelt till

$$z'(t) = \frac{d}{dt} y(e^t) = y'(e^t)e^t$$

så $y'(e^t) = e^{-t}z'(t)$. Vi deriverar nu detta uttryck en gång till (både produkt och kedjeregeln):

$$z''(t) = \frac{d}{dt}\big(y'(e^t)e^t\big) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = y''(e^t)e^{2t} + z'(t)$$

så $y''(e^t) = e^{-2t}(z''(t) - z'(t))$. Sen kan vi fortsätta:

$$\begin{aligned} z'''(t) &= \frac{d}{dt}\big(y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t\big) \\ &= y'''(e^t)e^{3t} + 2y''(e^t)e^{2t} + y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t \\ &= y'''(e^t)e^{3t} + 3(z''(t) - z'(t)) + z'(t) \end{aligned}$$

vilket ger $y'''(e^t) = e^{-3t}\big(z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)\big)$ och så vidare.

Exempel

Finn alla lösningar till $x^3y''' - 2xy' = 12 - 4x$.

Lösning. Låt $t = \ln x$. Då är $x = e^t$ och vi låter $z(t) = y(e^t)$. Enligt ovan blir nu

$$x^3y''' - 2xy' = 12 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad z''' - 3z'' = 12 - 4e^t.$$

Vi skriver upp det karakteristiska polynomet $p(r) = r^3 - 3r^2 = r^2(r-3)$. De homogena lösningarna ges alltså av

$$z_h(t) = C_1e^{3t} + C_2t + C_3.$$

Vi ansätter en partikulärlösning $z_p(t) = At^2 + Be^t$. Då blir

$$z_p''' - 3z_p'' = Be^t - 6A - 3Be^t = -2Be^t - 6A = 12 - 4e^t,$$

så $12 = -6A$ och $2B = 4$. Alltså måste $A = -2$ och $B = 2$. Vi har totalt sett lösningarna

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t) = C_1e^{3t} + C_2t + C_3 - 2t^2 + 2e^t.$$

Vi byter tillbaka till variabeln x och erhåller då

$$y(x) = C_1x^3 + C_2\ln x + C_3 - 2\ln^2 x + 2x.$$

4 Kontroll av lösningar

Vad betyder det egentligen att $p(D)y(x) = h(x)$ och, e.g., $y(0) = y'(0) = 0$? Vi har nu tagit fram verktyg för att hitta något magiskt $y(x)$ som man svarar med och får poäng på tentan. Men vad är egentligen $y(x)$? Dessa funktioner är inget annat än precis de funktioner som löser **ekvationen** $p(D)y(x) = h(x)$ i något intervall $]a, b[$ som bestäms tillsammans med $y(x)$. Lösningen uppfyller också eventuellt några givna villkor. Vi kan alltså **alltid** testa om vi verkligen har löst uppgiften genom att sätta in vårt svar i ekvationen och testa. Även om den här kontrollen inte krävs bör man genomföra den!

Exempel

Visa att $y(x) = C_1e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ löser ekvationen $y''' - 2y'' + y' - 2y = 6(x - x^2 - 2)$ för alla konstanter C_1.

Lösning. Vi deriverar på och får

$$\begin{aligned}
y' &= 2C_1e^{2x} + 6x + \cos x \\
y'' &= 4C_1e^{2x} + 6 - \sin x \\
y''' &= 8C_1e^{2x} - \cos x
\end{aligned}$$

och sätter vi in dessa uttryck i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}
y''' - 2y'' + y' - 2y &= 8C_1e^{2x} - \cos x - 2(4C_1e^{2x} + 6 - \sin x) + 2C_1e^{2x} + 6x + \cos x \\
&\quad - 2(C_1e^{2x} + 3x^2 + \sin x) \\
&= C_1(8 - 8 + 2 - 2)e^{2x} + (-1 + 1)\cos x + (2 - 2)\sin x - 12 + 6x - 6x^2 \\
&= 6(x - x^2 - 2).
\end{aligned}$$

Vi kan även utifrån kända lösningar konstruera ekvationer som får precis dessa lösningar.

Exempel

Hitta en differentialekvation som har precis lösningarna $(Ae^{2x} + 1)\cos x + Be^{2x}\sin x$.

Lösning. Vi kan identifiera att det är $e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$ som är de homogena lösningarna och att $\cos x$ är en partikulärlösning. Vi börjar med att konstruera en ekvation som har korrekta homogena lösningar. Vi ser att på komplex form måste termerna $e^{(2\pm i)x}$ finnas med så det karakteristiska polynomet måste ges av $p(r) = (r - (2 + i))(r - (2 - i)) = r^2 - 4r + 5$. Således är den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 0$. Nu vill vi att $y_p = \cos x$ ska vara en partikulärlösning så vi undersöker vilket högerled som är nödvändigt:

$$y_p'' - 4y_p' + 5y_p = -\cos x - 4(-\sin x) + 5\cos x = 4\cos x + 4\sin x.$$

Svaret blir alltså ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 4\cos x + 4\sin x$.

5 Generell struktur

Följande stycke handlar om linjär algebra och kopplingen till linjära DE. Spara det till ni har läst kursen i linjär algebra.
Eftersom $p(D)$ är *linjär* kan vi addera två homogena lösningar och få en ny homogen lösning samt även multiplicera en homogen lösning med en konstant och erhålla en ny homogen lösning. Detta argument visar att mängden av homogena lösningar utgör ett vektorrum V. Detta rum är alltså mängden av alla lösningar y till ekvationen $p(D)y = 0$. I klassisk teori betraktar man V som ett *underrum* av C^n (alla n gånger kontinuerligt deriverbara funktioner), vilket är ett naturligt krav med tanke på den högsta derivatan som ingår.
Om detta kan mycket skrivas, men fokus här är på strukturen av lösningsrummet V. Vi vet från satsen i föregående avsnitt att det i de enklaste fallen finns n stycken olika rötter som vardera ger upphov till en exponentialfunktion som homogen lösning. Finns det multipla rötter till polynomet ges homogena lösningar som polynom $q(x)$ gånger exponentialfunktioner och även här finns det precis n stycken olika sorters funktioner (exempelvis e^x och xe^x betraktas som helt olika). Detta är ingen slump utan dessa n typer av funktioner utgör en *bas* för vektorrummet V. Konstanterna i den allmänna homogena lösningen skapar alltså en *linjärkombination* av *basvektorerna*. Den allmänna homogena lösningen beskriver alltså en godtycklig vektor i rummet V.

6 Ansatser för partikulärlösningar

Vi avslutar med en tabell för ansatser till partikulärlösningar. Rimligheten i ansatserna kommer från att fundera över vad för slags funktioner man behöver skicka in i en DE för att få ut det högerled man vill ha. Observera att ansatsen $z(x)e^{ax}$ (med $a \in \mathbf{C}$ eventuellt) kan användas i stället för de varianter som innehåller termer e^{ax}, vilket reducerar problemet till en enklare DE för z där vi har fått bort exponentialtermen. Detta gäller även i fallet då högerledet innehåller termer av typen $e^{ax}\cos bx$ eller $e^{ax}\sin bx$. Ekvationen reduceras då till en ekvation för z där högerledet endast innehåller $\sin bx$ och/eller $\cos bx$. Kom även ihåg att man kan hitta partikulärlösningar för sådana högerled genom en komplex hjälpekvation (hur då?).

Tabell 1: Ansatser för partikulärlösningar.

Högerled	Ansats	Undantag[1]
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$	$r = 0$ rot
	$x(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ dubbelrot
	$x^2(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ trippelrot
	$\ldots$	$\ldots$
$A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$	$B_1 \sin kx + B_2 \cos kx$	$r = \pm ik$ rot
	$x(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ dubbelrot
	$x^2(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ trippelrot
	$\ldots$	$\ldots$
e^{ax}, $a \in \mathbf{C}$	Be^{ax}	$r = a$ rot
	Bxe^{ax}	$r = a$ dubbelrot
	Bx^2e^{ax}	$r = a$ trippelrot
	$\ldots$	$\ldots$
$q(x)e^{ax}$	$z(x)e^{ax}$	inga undantag[2]
$A_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + A_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$B_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + B_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$	$r = \alpha \pm i\beta$ rot

[1] Om undantagsfallet inträffar försöker vi med ansatsen på nästa rad.
[2] Ger ekvation för z. Nytt högerled där e^{ax} försvunnit. Hitta *en* lösning till denna ekvation! Metodval beror på $q(x)$.