Föreläsning 11: Potensserier

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

5 mars 2020

Vi ska nu betrakta serier där termerna inte längre är konstanter. Speciellt ska vi studera så kallade potensserier. Dessa definieras som

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

för de x där detta uttryck har mening (dvs serien konvergerar). Värt att notera är att dessa typer av serier beskriver funktioner (för de x där serien är konvergent). Om endast ett ändligt antal a_k är skilda från noll är det bara ett polynom, men om oändligt många a_k inte är noll får vi i någon mening ett polynom med oändligt många termer. Vilka slags funktioner kan beskrivas på det sättet? Väldigt många ska det visa sig.

1 Konvergens av potensserier

Vi kan så klart använda alla tekniker som togs fram för numeriska serier på förra föreläsningen, men vi kommer att använda följande två kriterier flitigt.

Rot- och kvotkriteriet

Sats. Om $Q = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}$ eller $Q = \lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$ existerar så är $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$.

Dessa kriterier (att de två gränsvärdena som ger Q existerar samt uppfyller $Q < 1$) brukar kallas *Cauchys rotkriterie* respektive *d'Alemberts kvotkriterie*. Man kan visa att rotkriteriet är starkare, dvs att om detta är sant så gäller även kvotkriteriet. Däremot så kan kvotkriteriet ibland vara enklare att kontrollera. Beviset för rotkriteriet bygger på att man utnyttjar att $Q < 1$ för att uppskatta serien med en geometrisk serie med kvoten q, där $Q < q < 1$.
Dessa konvergenstester kan så klart användas på vilka serier som helst, men det finns konvergenta serier vi inte kan konstatera är konvergenta med varken rot- eller kvotkriterier.

Serien[a] $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5+(-1)^k}{2}\right)^{-k}$ är konvergent men rotkriteriet är inte uppfyllt. Vi kan se detta genom att skriva ut hur termerna ser ut:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots$$

vilket är summan av två geometriska serier som konvergerar. Däremot ser vi att

$$|a_k|^{1/k} = \frac{2}{5+(-1)^k}$$

hela tiden hoppar mellan $\dfrac{1}{2}$ och $\dfrac{1}{3}$ så gränsvärdet saknas till och med.

Övning: visa att serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k - k}$ konvergerar enligt rotkriteriet men att vi inte kan dra någon slutsats från kvotkriteriet.

[a] G.R. Gelbaum and J.M.H Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Dover 1992

Intressant nog så beter sig potensserier alltid förhållandevis snällt. Till exempel gäller alltid följande.

Konvergensradie

Sats. Varje potensserie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har en maximal *konvergensradie* R så att serien är absolutkonvergent då $|x| < R$ och divergent då $|x| > R$.

Notera att fallet då $x = \pm R$ ej nämns. Detta fall måste specialbehandlas från situation till situation. Vidare är det så klart så att om rotkriteriet inte ger något Q krävs en noggrannare analys av termerna.

Bevis. Ett ordentligt bevis återfinnes i boken, men tanken är ganska logisk. Om vi antar att $Q = \lim\limits_{k\to\infty} |c_k|^{1/k}$ existerar så är $\lim\limits_{k\to\infty} |c_n x^n|^{1/n} = Q|x|$. Enligt rotkriteriet ovan är serien (absolut)konvergent om $Q|x| < 1$, dvs då $|x| < 1/Q$ (såvida inte $Q = 0$ men då behövs inget krav på x) och divergent då $|x| > 1/Q$. Vårt R är alltså $R = 1/Q$ då $Q \neq 0$ och $R = \infty$ då $Q = 0$.

Exempel

För vilka x konvergerar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$?

Lösning. Rotkriteriet:

$$\left|\frac{x^k}{k^2}\right|^{1/k} = \frac{|x|}{k^{2/k}} = |x|\exp\left(-\frac{2\ln k}{k}\right) \to |x|$$

då $k \to \infty$ eftersom $(\ln k)/k \to 0$. Med andra ord ger $|x| < 1$ konvergens och $|x| > 1$ divergens (enligt rotkriteriet). Vi undersöker $x = \pm 1$ speciellt och ser att både

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

är konvergenta (absolutkonvergenta till och med). Svaret blir alltså $-1 \leq x \leq 1$.

Exempel

Bestäm konvergensområdena för följande potensserier. Med andra ord, finn konvergensradien och avgör även om serierna konvergerar då $x = \pm R$.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^{2k}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (\ln k)^{-1}x^k$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$ (iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k$

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^{3k}$ (vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k x^k}{2^k\sqrt{k}}$ (vii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k\,2^k}$ (viii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{x^{2k}}$.

Lösning. Vi tar en i taget.

(i) Enligt kvotkriteriet konvergerar serien åtminstone då

$$1 > Q = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)|x|^{2k+2}}{k|x|^{2k}} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)|x|^2 = |x|^2$$

så $|x| < 1$. Konvergensradien är alltså $R = 1$. När $x = 1$ ges serien av

$$\sum_{k=1}^{\infty} k1^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} k = \infty$$

och när $x = -1$ ges serien av $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k$ som divergerar enligt divergenstestet då termerna inte går mot noll. Konvergensområdet är $-1 < x < 1$.

(ii) Vi använder kvotkriteriet igen och ser att

$$\frac{|\ln(k+1)|^{-1}|x|^{k+1}}{|(\ln k)^{-1}||x|^k} = \frac{|x|^{k+1}}{\ln(k+1)}\cdot\frac{\ln k}{|x|^k} = \frac{\ln k}{\ln\left(k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)}|x| = \frac{\ln k}{\left(1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln k}\right)\ln k}|x| \to |x|,$$

då $k \to \infty$. Konvergensradien blir således $R = 1$. När $x = 1$ får vi

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1^k}{\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

eftersom $\ln k \leq k$ och $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} 1/k = \infty$. När $x = -1$ ges summan av $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ vilken är konvergent enligt Leibniz konvergenstest (visa det!). Konvergensområdet blir $-1 \leq x < 1$.

(iii) Vi använder kvotkriteriet igen (ofta lämpligt när $k!$ är inblandat):

$$\frac{2^{k+1}|x|^{k+1}/(k+1)!}{2^k|x|^k/k!} = \frac{2^{k+1}|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k|x|^k} = \frac{2|x|}{k+1} \to 0,$$

då $k \to 0$. Här är alltså $R = \infty$ och någon undersökning av $x = \pm R$ är inte aktuell. Konvergensområdet är $-\infty < x < \infty$.

(iv) Här är rotkriteriet lämpligt och $\left(3^k|x|^k\right)^{1/k} = 3|x|$ så $3|x| < 1$ ger absolutkonvergens. Alltså är $R = 1/3$. När $x = \pm 1/3$ erhåller vi $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k(\pm 3)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (\pm 1)^k$ som divergerar i båda fallen. Konvergensområdet är $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

(v) Här är rotkriteriet lämpligt och $\left(3^k|x|^{3k}\right)^{1/k} = 3|x|^3$ så $3|x|^3 < 1$ ger absolutkonvergens. Alltså är $R = 1/\sqrt[3]{3}$. När $x = \pm 1/\sqrt[3]{3}$ erhåller vi $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k(\pm\sqrt[3]{3})^{-3k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k 3^{-k}(\pm 1)^k$ som divergerar i båda fallen. Konvergensområdet är $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

(vi) Vi har

$$\left(\frac{k^k|x|^k}{2^k\sqrt{k}}\right)^{1/k} = \frac{k|x|}{2k^{1/2k}} \to \infty$$

då $k \to \infty$ eftersom $k^{1/2k} \to 1$ då $k \to \infty$. Alltså är $R = 0$. Koefficienterna växer alltså för snabbt för att vi ska få något vettigt. Konvergensområdet är $x = 0$.

(vii) Vi använder kvotkriteriet och ser att

$$\left|\frac{(x+1)^{k+1}}{(k+1)2^{k+1}} \cdot \frac{k2^k}{(x+1)^k}\right| = \frac{|x+1|}{2} \cdot \frac{1}{1+1/k} \to \frac{|x+1|}{2}$$

då $k \to \infty$. Serien är alltså absolutkonvergent då $|x+1| < 2 \quad\Leftrightarrow\quad -3 < x < 1$. Vi undersöker nu speciellt $x = -3$ och $x = 1$. Först $x = -3$ där

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

är konvergent enligt Leibniz kriterie ($1/k$ är strängt avtagande mot noll). När $x = 1$ är serien divergent eftersom detta blir den harmoniska serien. Konvergensområdet blir således $-3 \leq x < 1$.

(viii) Den här är lite annorlunda eftersom vi har negativa exponenter av x. Detta kommer att innebära att vi får konvergens **utanför** en konvergensradie i stället. Vi undersöker med rotkriteriet:

$$\left|\frac{2^k}{x^{2k}}\right|^{1/k} = \frac{2}{|x|^2}$$

för alla k. Kravet blir alltså att $2/|x|^2 < 1$ vilket är ekvivalent med att säga $|x|^2 > 2$ eller att $|x| > \sqrt{2}$. När $x = \pm\sqrt{2}$ blir serien divergent i båda fallen (termerna blir identiskt lika med ett). Konvergensområdet blir $x > \sqrt{2}$ och $x < -\sqrt{2}$.

2 Termvis derivering och integrering

Det vi ger oss in på nu är inte helt enkelt egentligen utan kräver begrepp som *likformig* konvergens. Men som tur är beter sig potensserier så snällt att dessa operationer fungerar utan problem när $|x|$ är mindre än konvergensradien.

Sats. Låt $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ha konvergensradien $R > 0$. Då gäller att f kan deriveras kontinuerligt oändligt många gånger på $]-R, R[$ och att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad \text{samt} \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa potensserier har samma konvergensradie R.

Det faktum att vi kan derivera hur många gånger som helst leder till intressanta följder kopplat till Maclaurinutvecklingar. Vi återkommer kort till detta snart.

Termer ”försvinner” vid derivering

Observera att summan justeras vid derivering av en potensserie då c_0-termen försvinner. Deriverar man två gånger försvinner både c_0- och c_1-termerna, så

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Annars skulle det trilla ut negativa exponenter på x vid derivering vilket är omöjligt. Man kan dock även betrakta serier som har negativa exponenter (så kallade *Laurant*-serier), men sådana termer kan aldrig dyka upp från en potensserie som vi definierat tidigare. Vi kommer ofta indexera om serier som den ovan, i.e.,

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k,$$

vilket underlättar när vi vill jämföra serier.

Exempel

Räkna ut serierna $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$.

Lösning. Serierna är båda två konvergenta (absolutkonvergenta till och med) eftersom termerna avtar tillräckligt snabbt. Vi betraktar nu "hjälpserierna" $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k$. Båda dessa serier har konvergensradie $R = 1$ (visa det). Dessutom, eftersom

$$kx^k = xkx^{k-1} = x\frac{d}{dx}x^k$$

så följer det att

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

eftersom det blir derivatan av en geometrisk serie med kvoten x. Således kan vi (med $x = 1/3$) räkna ut att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k} = \frac{1/4}{(1-1/4)^2} = \frac{4}{9}.$$

På liknande sätt ser vi att

$$\frac{1}{k}x^k = \int_0^x t^{k-1}\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

och därmed att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right) dt$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x).$$

Detta kan vi använda för att beräkna den andra serien (med $x = 1/2$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} = -\ln(1-1/2) = \ln 2.$$

3 Feluppskattning

Om man bara tar med ett ändligt antal termer i potensserien, kan man säga något om hur bra approximation detta ger?

Exempel

Bestäm n så att $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < 10^{-4}$ för $|x| < \frac{1}{2}$.

Lösning. Enklast är att observera att $k! \geq (n+1)!$ för $k \geq n+1$ och därför skriva

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| < \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{(n+1)!}\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

Vi ser att med $n = 5$ blir nämnaren $6! \cdot 2^5 = 720 \cdot 32 > 21000$, så hela serien blir $< 10^{-4}$.

Exempel

Beräkna $\ln 2$ som ett rationellt tal med ett fel på högst 10^{-4}.

Lösning. Vi kan så klart gå tillbaka till Maclaurinutvecklingar, men vi kan även använda serien vi tog fram i förra exemplet. Där visade vi att $\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}$. Då är alltså

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k\,2^k} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}.$$

Vi uppskattar den sista termen och ser hur stort N måste vara för att vi säkert ska få denna del av serien $< 10^{-4}$. Alltså,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} \le \frac{1}{N} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{N} 2^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-N}}{N} \frac{1}{1-2^{-1}} = \frac{2^{1-N}}{N}.$$

Enklast är nu att testa värden på N och se att om $N = 16$ så räcker det eftersom

$$2^{-15} = \frac{1}{1024 \cdot 32} \le \frac{1}{10^4}.$$

Närmevärdet ges alltså av $\sum_{k=1}^{14} \frac{1}{k 2^k}$ (vilket är ett rationellt tal).

3.1 Alternerande serier

När det gäller alternerande serier av Lebniz-typ (så att $|a_k|$ är avtagande) så kan vi göra en enklare uppskattning av felet. Om $a_{n+1} > 0$ (liknande resultat gäller om $a_{n+1} < 0$) har vi

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots = a_{n+1} + (a_{n+2} + a_{n+3}) + (a_{n+4} + a_{n+5}) + \cdots,$$

där varje parentes är ≤ 0 eftersom $|a_k|$ är avtagande (och serien är alternerande). Detta medför alltså att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \le a_{n+1}$$

om $a_{n+1} > 0$.

Exempel

Visa att $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ konvergerar och hitta ett n så att $\sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ approximerar serien med ett fel på högst 10^{-4}.

Lösning. Serien är alternerande och $\left|\dfrac{(-1)^k}{\ln k}\right| = \dfrac{1}{\ln k}$ är strängt avtagande mot noll så serien är konvergent enligt Leibniz sats. Dessutom gäller att

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}\right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)},$$

så om felet ska vara $< 10^{-4}$ krävs att

$$\ln(n+1) > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \exp\left(10^4\right) - 1 \approx 10^{4342}.$$

Ganska många termer alltså. Är det förvånande?

Exempel

Upprepa samma procedur som i förra exemplet för $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k}$.

Lösning. Man kan använda Leibniz sats, men serien är absolutkonvergent (varför?) så det är inte nödvändigt. Däremot bör vi använda det när det gäller felet. Vi har

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k}\right| \leq \frac{1}{e^{n+1}},$$

så om felet ska vara $< 10^{-4}$ krävs att

$$\exp(n+1) > 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \ln\left(10^4\right) - 1 = 4\ln 10 - 1 \approx 8.21.$$

Betydligt färre! Vad händer om vi uppskattar som geometrisk serie i stället? Vi undersöker:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{e^k}\right| \leq \frac{1}{e^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^k} = e^{-(n+1)} \frac{1}{1-e^{-1}},$$

så det blir inte så jättestor skillnad när termerna går mot noll snabbt.