Föreläsning 13: Oändlig summering – en återblick

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

10 mars 2020

1 Generaliserade integraler

Påminn er om följande definition. Om f är kontinuerlig på $]a, b[$ så definierar vi den *generaliserade* integralen enligt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^c f(x)\,dx + \lim_{t\to b^-} \int_c^t f(x)\,dx, \text{ där } a < c < b,$$

om båda gränsvärdena existerar ändligt (oberoende av varandra). I fallet då båda gränsvärdena existerar kallar vi integralen för **konvergent**, annars **divergent**.

Om $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty$ kallar vi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ för **absolutkonvergent**. Notera att en absolutkonvergent integral *alltid* är konvergent och att

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

För att avgöra konvergens använder vi ofta jämförelsesatser.

1.1 Jämförelsesatser

Sats. Om $0 \le f(x) \le g(x)$ för $a < x < b$ så gäller $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

(i) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ divergent.

Sats. Låt f och g vara icke-negativa kontinuerliga funktioner sådana att:

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ och $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ är generaliserade **endast** i $x = b$;

(ii) $\displaystyle 0 < \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$.

Då gäller att

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx \text{ är konvergent.}$$

Generalisering i $x = a$ istället fungerar analogt, men se till att endast en punkt är generaliserad i taget. Dela upp integralen annars. För att använda dessa satser är det användbart att ha något enkelt att jämföra med.

Vanliga jämförelsefunktioner

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$ om och endast om $\alpha < 1$;

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$ om och endast om $\alpha > 1$.

Givetvis går det bra att jämföra med något mer komplicerat, även om analysen av $\displaystyle\int g(x)\,dx$ då blir mer komplicerad.

Exempel

Konvergerar integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx$? Motivera noggrant.

Lösning. Eftersom integralen är generaliserad både i 0 och ∞ så delar vi upp i två delar:

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\,dx.$$

Vi börjar med att undersöka integralen på $[0,1]$. För $x \in]0,1]$ gäller att

$$\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}.$$

Nu vet vi att $x^{-1}\arctan x \to 1$ och $x^{-1}\ln(1+x) \to 1$ då $x \to 0$, så

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}} = 1.$$

Låt därför $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ och $f(x) = g(x)\dfrac{\arctan x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{x^{-1}\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då är $f, g \geq 0$ för $x > 0$ och både f och g är kontinuerliga för $x > 0$. Vidare visade vi ovan att

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \in]0, \infty[\text{ då } x \to 0^+,$$

så enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform följer det att

$$\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}}\, dx$$

kommer vara absolutkonvergent eftersom vi vet att $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx < \infty$.
Vi undersöker nu integralen på $[1, \infty[$. Vi skriver

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x}{x\sqrt{\ln(1+x)}} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x}\sqrt{\ln(1+x)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \end{aligned}$$

så vi låter $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}$ för $x > 0$. Då gäller att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right)\arctan x \to \frac{\pi}{2}, \text{ då } x \to \infty.$$

Eftersom f och g är kontinuerliga och icke-negativa på $]1, \infty[$ samt att gränsvärdet mot ∞ för f/g är $\dfrac{\pi}{2} \in]0, \infty[$ så följer det från jämförelsesatsen på gränsvärdesform att $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$ är konvergent om och endast om $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\, dx$ är konvergent. Vi undersöker denna integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{\ln(1+x)}}\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} \int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$$

eftersom $\ln(1+x) \geq \ln 2$ för $x \geq 1$. Den sista integralen är känd som konvergent ($\alpha = 3/2$ är större än 1).
Svar. Konvergent!

2 Numeriska Serier

Om a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ är en talföljd definierar vi **serien** s enligt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

i de fall då detta gränsvärde existerar. Vi kallar $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ för **delsummor** av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Analogt med integraler (många resultat har en motsvarighet men inte alla så var försiktig) kallar vi en serie för **absolutkonvergent** om $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ är konvergent.

Ett mycket användbart resultat är divergenstestet. Märk väl att det *endast* är en implikation. Det finns gått om fall där termerna går mot noll men serien fortfarande är divergent (tex $a_k = 1/k$).

Divergenstestet

Sats. Om $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Vanliga serier

(i) Den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ om och endast om $|q| < 1$. Annars divergent.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$

Sats. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Speciellt gäller att

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent $\quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent,

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent $\quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

Cauchys integralkriterium

Sats. Om $f(x) \geq 0$ är en avtagande funktion för $x \geq 1$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

Exempel

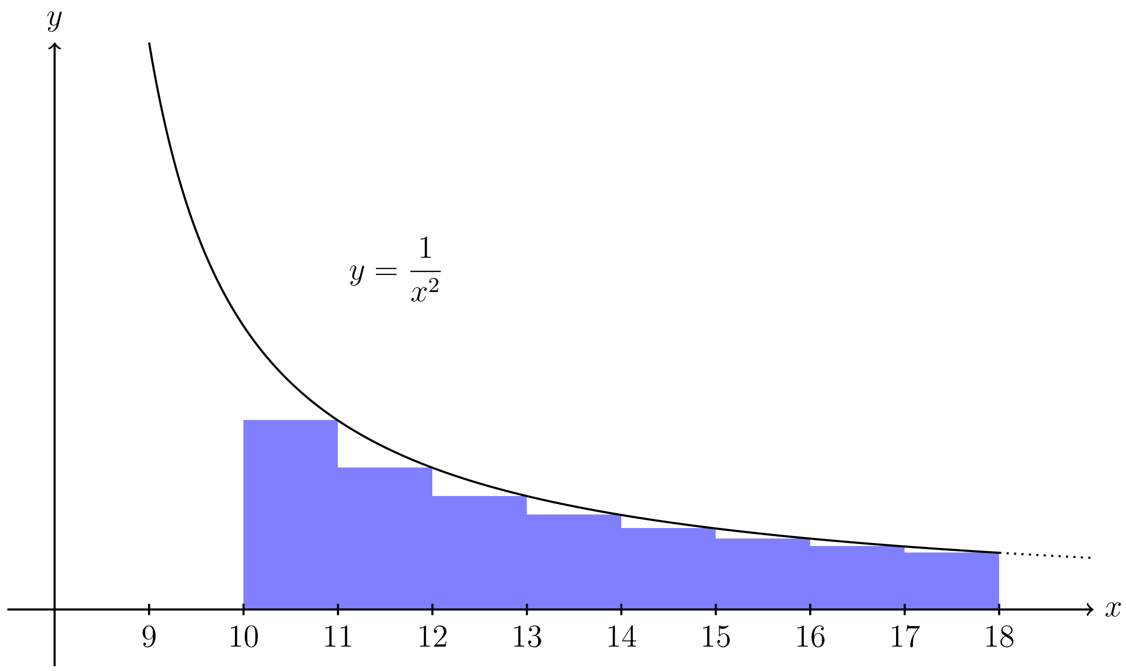
Visa att $\displaystyle\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{10}$.

Lösning. Eftersom funktionen $f(x) = 1/x^2$ är positiv och strängt avtagande för $x \geq 1$, så kommer

$$\sum_{k=11}^{n} \frac{1}{k^2} < \int_{10}^{n} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{n} = \frac{1}{10} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10}$$

för alla $n > 10$. Således kommer delsummorna i den positiva serien att vara uppåt begränsade, så serien är konvergent och dess värde är begränsat av

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{10}.$$



Sats. Om $a_k \geq 0$ och $b_k \geq 0$ samt

$$0 < \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$$

så gäller att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty.$$

Rot- och kvotkriteriet

Sats. Om $Q = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}$ eller $Q = \lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k|$ existerar så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent om $Q < 1$ och divergent om $Q > 1$.

Leibniz sats

Sats. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en serie sådana att

(i) serien är alternerande så att $a_{k+1} = -a_k$ för alla k som det summeras över,

(ii) seriens termer går mot noll: $a_k \to 0$,

(iii) absolutbeloppet av seriens termer avtar monotont: $|a_k| \geq |a_{k+1}| \geq |a_{k+2}| \geq \cdots$,

så är serien konvergent. En serie som uppfyller dessa krav uppfyller även att

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

3 Potensserier

Dessa definieras som

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

för de x där detta uttryck har mening (dvs serien konvergerar).

Varje potensserie $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ har en maximal *konvergensradie* R så att serien är absolutkonvergent då $|x| < R$ och divergent då $|x| > R$. Vidare gäller att f kan deriveras kontinuerligt oändligt många gånger på $]-R, R[$ och att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} \qquad \text{samt} \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1},$$

där dessa potensserier har samma konvergensradie R.

Exempel

För vilka $x \in \mathbf{R}$ konvergerar $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{3k}}{8^k \ln k}$?

Lösning. Vi börjar med att bestämma konvergensradien R för serien. Eftersom

$$\left|\frac{x^{3k}}{8^k \ln k}\right|^{1/k} = \left(\frac{|x|}{2}\right)^3 e^{-\frac{1}{k}\ln\ln k} \to \left(\frac{|x|}{2}\right)^3, \quad \text{då } k \to \infty,$$

så är serien enligt rotkriteriet absolutkonvergent då

$$\left(\frac{|x|}{2}\right)^3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$$

och divergent om $x > 2$ eller $x < -2$. Kvar att undersöka är punkterna $x = \pm 2$. Om $x = 2$ ges serien av

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$$

som är divergent eftersom $\ln k \leq k$ och den harmoniska serien är divergent. Om $x = -2$ kan serien uttryckas

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2)^{3k}}{8^k \ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}.$$

Eftersom termerna i denna serie avtar mot noll, dvs $1/\ln(k+1) < 1/\ln k$ och $1/\ln k \to 0$, samt att serien är alternerande, följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.
Svar: $-2 \leq x < 2$.

4 DE med potensserieansats

Vi kan även använda en potensserieansats för att hitta lösningar till linjära differentialekvationer. Åtminstone kan vi finna de lösningar som kan representeras som en potensserie.

Exempel

Lös ekvationen $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 0$, med potensserieansats. I svaret skall anges (minst) fyra nollskilda koefficienter, rekursionsformeln för seriens koefficienter och potensseriens konvergensradie.

Lösning. Vi ansätter en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$. Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k$$

samt

$$2xy(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1} x^k.$$

Alltså måste
$$1 = y' - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1}\right) x^k.$$
Eftersom koefficienterna är entydiga så innebär detta att $c_1 = 1$ samt att
$$c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$
Villkoret att $y(0) = 0$ ger att $c_0 = 0$, vilket resulterar i att
$$c_2 = c_4 = c_6 = \cdots = 0.$$
För udda index ser vi att
$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_3 &= \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3} \\ c_5 &= \frac{2c_3}{5} = \frac{2^2}{3 \cdot 5} \\ c_7 &= \frac{2c_5}{7} = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots \\ c_{2k+1} &= \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}. \end{aligned}$$
Svaret ges alltså av serien
$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$
då de jämna termerna försvinner. Här är c_{2k+1} koefficienterna vi bestämde ovan. Konvergensradien kan vi enklast finna medelst kvottestet:
$$\left| \frac{c_{2(k+1)+1} x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = \left| \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \right| |x|^2 = \left| \frac{2}{2k+3} \right| |x|^2 \to 0,$$
där vi använde rekursionsformeln
$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$
som vi härledde ovan. Konvergensradien är således oändlig.

Svar: $y(x) = x + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x^5}{15} + \dfrac{8x^7}{105} + \cdots$, $R = \infty$.