Föreläsning 16: inför tentan...

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

5 mars 2020

1 Maclaurin- och Taylorutvecklingar

Lär er de s.k. standardutvecklingarna (för e^x, $\cos x$ etc) och även ”formeln” som gäller för alla snälla funktioner kring godtycklig punkt $x = a$:

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + r(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}). \end{aligned}$$

Här är $p_n(x)$ Taylorpolynomet av ordning n (med grad $\leq n$) och resten $r(x)$ på ordo-form. Med $a = 0$ erhåller vi Maclaurinutvecklingen. Om Taylorutveckling kring $x = a$ sökes, försök introducera en variabel $t = x - a$ så att $t \approx 0$ då $x \approx a$. Skriv om $f(x)$ i variabeln t och utveckla m.a.p. t (använd gärna elementära Maclaurinutvecklingar här).

1.1 Tillämpningar med rest på ordo-form

- Se till att du behärskar ordo-kalkyl. Principfel i hanteringen av ordo-termer kan aldrig ge godkända uppgifter.

- Hitta utvecklingar genom ansatser, t ex genom att ansätta $\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + O(x^7)$ (tan är udda) och utnyttja utvecklingar för $\sin x$ och $\cos x$ samt att $\cos x \cdot \tan x = \sin x$ alternativt utvecklingen för $\arctan x$ samt att $\arctan(\tan x) = x$.

- Gränsvärden för kvoter: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Utveckla $f(x)$ och $g(x)$ och ange resten på ordo-form. Börja med nämnaren och utveckla sedan täljaren så du kommer ”förbi” första termen i nämnaren.

- Gränsvärden mot någon oändlighet, ofta $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - g(x)\big)$. Bryt ut det som dominerar och hitta nya variabler som går mot noll då $x \to \infty$ (tex $t = 1/x$). Observera att det går bra att ha olika variabler i olika delar av uttrycken så länge man byter tillbaka till x innan gränsvärdet räknas ut.

- Anpassa mot polynom, speciellt för att hitta asymptoter eller annat beteende mot oändligheten. Till exempel hitta a och b så $\lim\limits_{x\to\infty} \big(\sqrt{1+x^2} - ax - b\big) = 0$. Bryt ut det som dominerar ur roten och Maclaurinutveckla i ny variabel!

- Avgöra om stationära punkter är maximum eller minimum. Utveckla funktionen och studera beteendet som dominerar. Vad händer när man flyttar sig lite från den stationära punkten? Tänk $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4) = 1 - x^2(1/2 + O(x^2))$. Om man flyttar sig lite från $x = 0$ blir tillskottet negativt eftersom $1/2$ dominerar $O(x^2)$ i parentesen. En maxpunkt alltså!

1.2 Restterm på Lagranges form

Uppskatta fel i Maclaurinutvecklingar (eller Taylor) i andra punkter än bara väldigt nära en viss punkt (origo). Om $f \in C^{n+1}$ nära $x = a$ gäller att

$$\begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + r(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \end{aligned}$$

för något ξ mellan a och x. Notera att ξ beror på x (samt även a och n). Nytt x ger nytt ξ, så var försiktigt med hanteringen och uppskatta helst bort allt ξ-beroende i uttrycket när något ska göras.
Vanliga exempel på användningsområden:

- Funktionsvärden i en viss punkt, ex. $\cos \frac{1}{4}$.
- Visa olikheter som exempelvis att $|\sin x - (x - x^3/3!)| \leq |x|^5/120$.
- Uppskatta numeriskt värde på integral där vi inte har någon känd primitiv funktion: utveckla integranden och uppskatta felet över hela integrationsområdet. Polynomet är enkelt att integrera och med tillräckligt många termer är felet litet!

2 Generaliserade integraler

- Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ gäller att

  $$\int_a^b g(x)\,dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx < \infty$$

  och

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx = \infty.$$

- Om $f, g \geq 0$, alla integraler endast är generaliserade i $x = b$ och $0 < \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$ gäller att

  $$\int_a^b f(x)\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx < \infty.$$

  Vid användning: bryt ut det som dominerar i $f(x)$ nära $x = b$ och räkna ut gränsvärdet för ”det som blir över:”

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}\,dx.$$

  Motsvarande sats gäller om generaliseringen är i punkten $x = a$ (men bara en i taget!).

- Finns eller uppstår problem i flera punkter: dela upp integralen! För konvergens måste *alla* delar vara konvergenta. Om någon är divergent är hela integralen divergent. Se upp så din jämförelseintegral (dvs integralen av $g(x)$) inte blir generaliserad i fler punkter! Dela upp området om så behövs.

- Kända jämförelsefunktioner:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

  och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

- Absolutkonvergens. En absolutkonvergent integral är alltid konvergent. Kan även användas innan jämförelsesats tillämpas för att se till att integranden är ickenegativ. Observera att det finns villkorligt konvergenta integraler som inte är absolutkonvergenta.

3 Serier

Teorin är i många avseenden parallell med den för generaliserade integraler, men vi har bara problem i oändligheten och det finns vissa andra skillnader. Till exempel finns inget divergenstest för integraler (integranden behöver inte punktvis gå mot noll för konvergens).

Kortfattat. En **serie** $s = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergerar om **delsummorna** $s_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$ konvergerar till s då $n \to \infty$, dvs

$$s = \sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$$

om gränsvärdet existerar. Serien består av summan av **termerna** a_k, $k = m, m+1, \ldots$ Att säga att termerna konvergerar, dvs att $a_k \to a$ för något a då $k \to \infty$, är alltså något helt annat än att säga att serien konvergerar, dvs att delsummorna $s_n \to s$. Divergenstestet säger att $a = 0$ är nödvändigt för att $s_n \to s$ (men *inte* tillräckligt). Var *mycket* tydlig med vad det syftas på när något säges konvergera (eller divergera).

- Förstå hur konvergens för en serie definieras via delsummor.

- Divergenstestet, i.e., om termerna a_k *inte* går mot noll är serien divergent.

- Skillnad på absolutkonvergens och konvergens.

- Jämförelsesatserna för $0 \leq a_k \leq b_k$ respektive att $0 \leq a_k/b_k \to L$ med $0 < L < \infty$. Om $0 \leq a_k \leq b_k$ gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

  och

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty.$$

samt om $0 < \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} < \infty$ gäller att

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty.$$

Grundprincip för gränsvärdestestet: bryt ut det som dominerar mot oändligheten och betrakta vad som blir kvar. Är gränsvärdet strikt mellan 0 och ∞ är det den dominerande faktorn som avgör konvergens eller divergens (om positiva uttryck erhålls).

- Geometriska serier: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ om $|q| < 1$. Då $|q| \geq 1$ är serien divergent.
- Kända jämförelseserier:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$
- Cauchys jämförelseprincip: om $f(x) \geq 0$ och $f(x)$ är avtagande för $x \geq 1$ är
$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$
Se till att förstå hur uppskattningarna går till via över- och undertrappor för funktionen f. Detta ger också möjlighet till uppskattning av hur stor "svansen" $\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ är (och även för hela serien så klart).
- Leibniz-serier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ där a_{k+1} och a_k har olika tecken för alla k (alternerande) och
$$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots$$
samt $a_k \to 0$ (avtar mot noll). Alltså **TRE** krav (och dessa måste preciseras på tentan). Dessa serier konvergerar alltid! För feluppskattning gäller för Leibniz-serier att
$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq |a_{n+1}|.$$
Detta är **inte** sant för godtyckliga konvergenta serier!

4 Potensserier

- Kvot- och rottestet. En serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ är absolutkonvergent om
$$Q = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} < 1$$
eller om
$$Q = \lim_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} < 1.$$
Om $Q > 1$ är serien divergent. Om $Q = 1$ vet vi inget och inte heller om inget av gränsvärdena existerar. Dessa test kan även användas för "vanliga" numeriska serier.

- Ta fram konvergensradie för potensserie från kvot- eller rottestet. Testet ger en olikhet av formen $Q < 1$ där Q innehåller $|x|$. Lös ut $|x|$ för att hitta R så att $|x| < R$. Se upp om potensserien till exempel bara innehåller jämna potenser (x^{2k}) eller dylikt.
- Avgöra konvergens när $|x| = R$ (två fall, $x = \pm R$, sätt in i serien och undersök som numerisk serie!).
- Termvis derivering och integrering (ok för $|x| < R$, konvergensradien för den ursprungliga serien).
- Utnyttja derivering eller integrering för att räkna ut numeriska serier som exempelvis $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

  Kom ihåg att $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ om $|x| < 1$.

5 Differentialekvationer

5.1 Linjära ekvationer av ordning ett

Skriv om på formen

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

med konstant faktor 1 framför y'. Integrerande faktor: $e^{F(x)}$ där $F'(x) = f(x)$. Multiplicera med denna och VL blir $\left(e^{F(x)}y(x)\right)'$ och HL blir $g(x)e^{F(x)}$. Integrera och lös ut y.

5.2 Separabla ekvationer

Kom ihåg att här ingår definitionsmängden för lösningen i svaret! Detta är det största sammanhängande intervall där funktionen är C^1. Tekniken är separation av variabler:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx.$$

Se upp vid divisioner! Kan dyka upp lösningar eller ge problem i definitionsmängder (y respektive x).

5.3 Linjära DE av ordning två och högre med konstanta koefficienter

Två delar: homogen- och partikulärlösning. Den homogena hittas genom att hitta nollställen till det karakteristiska polynomet $p(r)$. En partikulärlösning hittas genom att ansätta något lämpligt. Kom ihåg förskjutningsregeln:

$$p(D)e^{ax}z(x) = e^{ax}p(D+a)z(x).$$

Denna förenklar mycket! Kan användas oavsett hur högerledet ser ut så länge det är en faktor e^{ax} med.

5.3.1 Superposition

Kom ihåg att man kan dela upp partikulärlösning i flera delar. Om HL består av, e.g., $e^x + 7$ kan vi hitta en partikulärlösning y_{p_1} som matchar e^x och en annan y_{p_2} som matchar 7. Den totala fås som $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

Tabell 1: Ansatser för partikulärlösningar.

Högerled	Ansats	Undantag[1]
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	$b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$	$r = 0$ rot
	$x(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ dubbelrot
	$x^2(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$	$r = 0$ trippelrot
	$\ldots$	$\ldots$
$A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$	$B_1 \sin kx + B_2 \cos kx$	$r = \pm ik$ rot
	$x(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ dubbelrot
	$x^2(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)$	$r = \pm ik$ trippelrot
	$\ldots$	$\ldots$
e^{ax}, $a \in \mathbf{C}$	Be^{ax}	$r = a$ rot
	Bxe^{ax}	$r = a$ dubbelrot
	Bx^2e^{ax}	$r = a$ trippelrot
	$\ldots$	$\ldots$
$q(x)e^{ax}$	$z(x)e^{ax}$	inga undantag[2]
$A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$	$B_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + B_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$	$r = \alpha \pm i\beta$ rot
	$B_1 x e^{\alpha x}\cos\beta x + B_2 x e^{\alpha x}\sin\beta x$	$r = \alpha \pm i\beta$ dubbelrot
	$\ldots$	$\ldots$

[1] Om undantagsfallet inträffar försöker vi med ansatsen på nästa rad.

[2] Ger ekvation för z. Nytt högerled där e^{ax} försvunnit. Hitta *en* lösning till denna ekvation!

5.4 Ekvationer av Eulertyp

Ekvationer av typen $a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = g(x)$, $x > 0$, löses genom variabelbytet $t = \ln x$ och introduktionen av $z(t) = y(e^t)$. Kom ihåg kedjeregeln! Leder till linjär ekvation med konstanta koefficienter.

5.5 Integralekvationer

I denna kurs är tanken att derivera fram en diffekv. och lösa den i stället. Begynnelsevillkor fås genom att välja någon smart punkt $x = a$ i integralekvationen så integralen försvinner (om möjligt). Kom ihåg integralkalkylens fundamentalsats som medför att

$$\frac{d}{dx}\int_{f(x)}^{g(x)} y(t)\,dx = y(f(x))f'(x) - y(g(x))g'(x)$$

om $f, g \in C^1$.

5.6 Analytiska lösningar (potensserier)

Lösa differentialekvationer genom potensserieansats. Lite bökigt men principen är enkel. Se till att förstå hur serien kan summeras om (omindexeras) så det blir enklare att matcha koefficienter. Kom ihåg också att termer ”försvinner” vid derivering av potensserie.

6 Längd, area och volym

- Plan area (till exempel mellan kurvor). Även på polär form!
- Kurvlängd för funktioner på formen $y = f(x)$ och parameterform $x = x(t)$ och $y = y(t)$. Kom ihåg bågelementet $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$.
- Rotationsarea och rotationsvolym för rotationer kring linjer $x = a$ och $y = b$. Kom ihåg skiv- och rörformler. Viktigaste steget är att få upp korrekta integraler i denna kurs.

Se till att ni kan rita ”principskisser” för de olika situationerna (och att dessa hänger ihop med formlerna). En principskiss innebär inte att funktionen måste se ut precis som i uppgiften utan behöver bara motivera formeln som används.