Föreläsning 2: Absolutbelopp, olikheter och summor

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

11 mars 2020

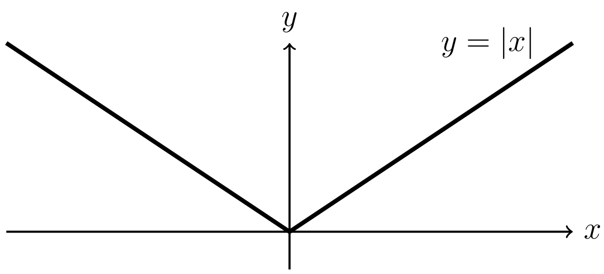
1 Absolutbelopp

Absolutbelopp

Definition. För varje reellt x definieras **absolutbeloppet** $|x|$ enligt

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Exempelvis har vi $|3| = 3$ och $|-4| = 4$. Beloppet tar alltså bort tecknet! Det är alltså en direkt konsekvens av definitionen att $|x| \geq 0$ för alla x. Dessutom kan vi uttrycka $\sqrt{x^2} = |x|$ (visa det!). Man kan så klart skissa upp hur beloppsfunktionen ser ut.



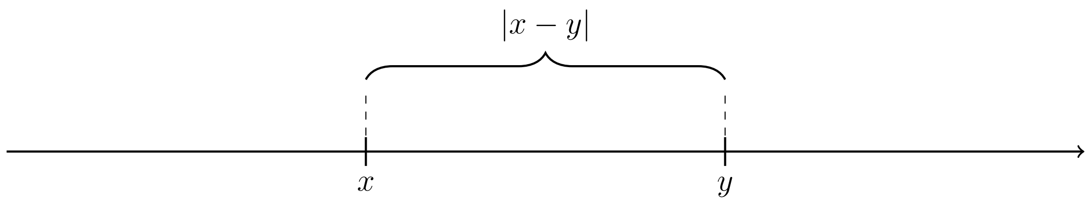
Strikt olikhet?

Observera att vi lika gärna hade kunnat definiera $|x|$ som x då $x > 0$ och $-x$ då $x \leq 0$, eller till och med x då $x \geq 0$ och $-x$ då $x \leq 0$. I den sista varianten har vi fallet $x = 0$ med två gånger, men $|0| = 0$ i båda fallen så detta orsakar ingen logisk kullerbytta. Däremot ser det kanske lite fult ut att definiera samma fall två gånger, men vi tillåter oss detta för att inte riskera att glömma bort något fall.

Ur definitionen följer det också att

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & x \geq y, \\ y - x, & x \leq y. \end{cases}$$

Vi kan alltså tolka $|x - y|$ som avståndet (alltid icke-negativt) mellan punkterna x och y på den reella axeln. Specialfallet är $|x - 0| = |x|$ som alltså är avståndet från x till origo.



Likheter och olikheter

Om $d \geq 0$ är en konstant så gäller följande.

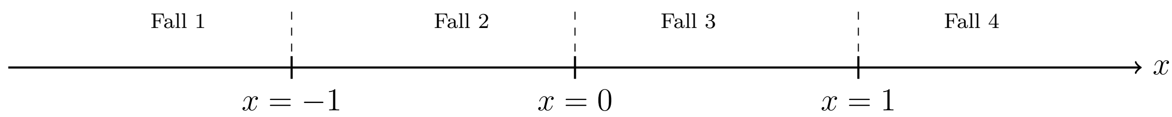
$$\begin{aligned} |x| = d \quad &\Leftrightarrow \quad x = \pm d \\ |x| \leq d \quad &\Leftrightarrow \quad -d \leq |x| \leq d \\ |x| \geq d \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq -d \text{ eller } x \geq d \end{aligned}$$

Hur löser vi då ekvationer och olikheter som innehåller absolutbelopp? Typiskt är att vi delar upp i olika fall, tillräckligt många för att vi ska kunna skriva uttrycken utan belopp i varje fall.

Exempel

Lös $|x| = 2|x-1| - |x+1|$.

Lösning.
Låt oss betrakta den reella tallinjen.



Intressanta punkter där beloppen kan växla tecken: $x = -1$ (då $x+1$ växlar tecken), $x = 0$ (då x växlar tecken), och $x = 1$ då ($x-1$ växlar tecken). Vi måste alltså dela upp i fyra olika fall.

Fall 1, $x < -1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) + (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3.$$

Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.

Fall 2, $-1 \leq x < 0$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $\frac{1}{2} \notin [-1, 0[$ så är detta ingen lösning.

Fall 3, $0 \leq x < 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

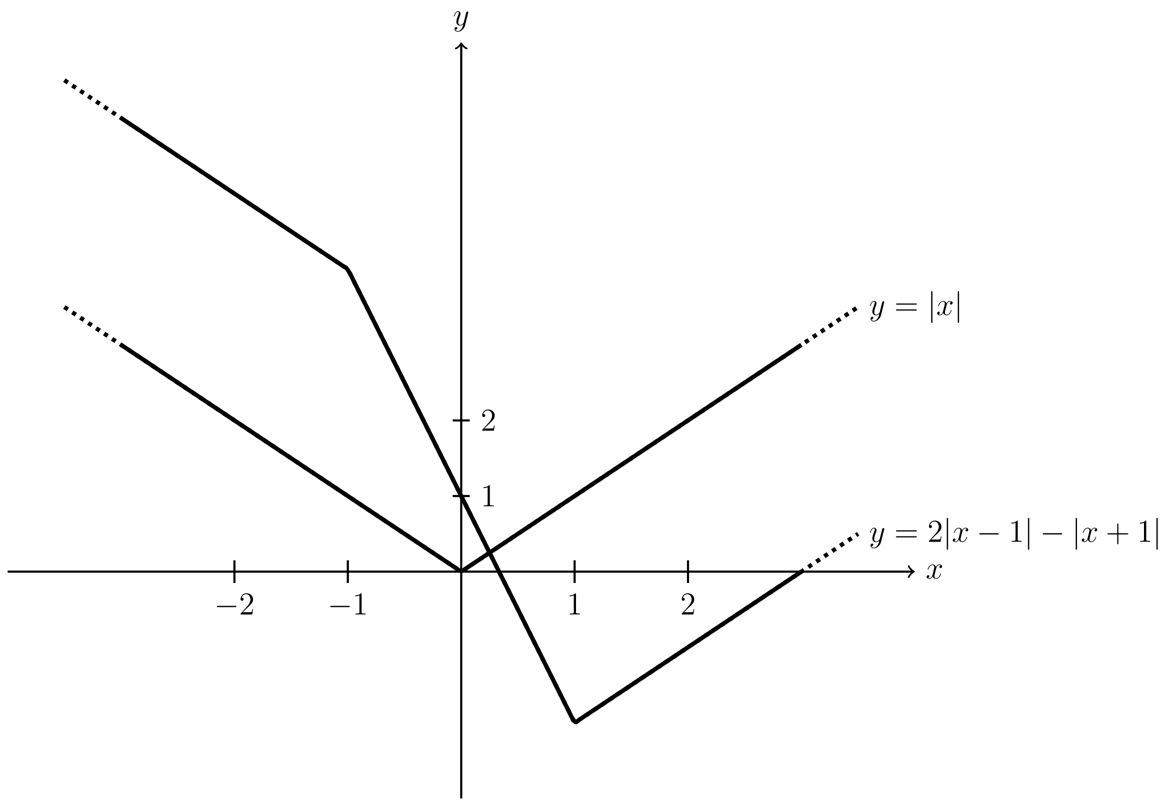
Eftersom $\frac{1}{4} \in [0, 1]$ så är detta en lösning.

Fall 4, $x \geq 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = 2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -3.$$

Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.

Figuren nedan skissar hur situationen ser ut grafiskt. Detta gör vi enklast genom att undersöka hur uttrycken ser ut i vart och ett av de fyra fallen.



Vi ser att uttrycken skär varandra i en enda punkt, som verkar ligga vid $x = 1/4$. Vi ser även ovan att det ofta blir "hörn" i brytpunkterna. Detta är normalt. Vad som inte ska ske är att det blir hopp. Detta eftersom beloppsfunktionen är kontinuerlig — ett begrepp vi återkommer till senare.
Svar: $x = \dfrac{1}{4}$ är den enda lösningen.

2 Olikheter

Att lösa olikheter skiljer sig en del från att lösa likheter. I allmänhet brukar det vara svårare, och ett problem är att man måste vara försiktig med att förkorta bort saker. Vi betraktar ett exempel för att belysa hur vi angriper problemet.

Exempel

Lös olikheten $\dfrac{4}{x+1} \leq x-2$.

Lösning. Tekniken vi rekommenderar är att flytta allt till ena sidan av olikheten, föra upp allt på gemensam nämnare, faktorisera, göra en teckentabell, och sist men inte minst kontrollera rimligheten. Således,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x+1} \leq x-2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{x+1} - (x-2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4-(x^2-x-2)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+x+6}{x+1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-(x+2)(x-3)}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x-3)}{x+1} \geq 0.
\end{aligned}$$

Observera tecknet i sista steget! Vi gör en teckentabell för det sista vänsterledet.

		-2		-1		3	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{(x+2)(x-3)}{x+1}$	$-$	0	$+$	☠	$-$	0	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är icke-negativt precis då $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$. Observera vart det blev strikt olikhet (varför?)!
Kontroll. Här kan vi till exempel plocka punkter i de olika intervallen som finns och se till att vårt påstående stämmer överens med det vi utgick från.

$$\begin{aligned}
x = -3: &\qquad \frac{4}{-3+1} = -2 > -5 \\
x = -\frac{3}{2}: &\qquad \frac{4}{-3/2+1} = -8 \leq -3/2 - 2 = -7/2 \\
x = 0: &\qquad \frac{4}{0+1} = 4 > 0-2 = -2 \\
x = 4: &\qquad \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5} < 4-2 = 2
\end{aligned}$$

Observera att denna kontroll inte *bevisar* att vi har gjort rätt (det kan fortfarande vara allvarliga fel vid faktorisering och identifiering av nollställen etc), men den visar ändå att svaret inte är orimligt. Ett vanligt fel på tentor och duggor är att man av någon anledning svarar med komplementintervallen. Detta ger alltid noll poäng oavsett anledning. Genom kontroll av typen ovan kan man enkelt undvika att svara med komplementintervallen.
Svar. $-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 3$.

Olikheter och multiplikation

Se upp med att multiplicera olikheter med variabler som kan skifta tecken! Till exempel kan det vara lockande att förlänga olikheten i föregående exempel med $x+1$. Då skulle vi i så fall kunna undersöka

$$4 \le (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 \ge 0.$$

Vi ser att nämnaren $x+1$ har försvunnit i jämförelse med ovan, och därmed kommer vår nya teckentabell att sakna den informationen. Punkten $x=-1$ är inte längre intressant och resten av tecknen riskerar att bli fel. Detta är så klart helt åt skogen. Den enda räddningen är att betrakta två fall: $x+1 \ge 0$ och $x+1<0$ och reda ut ett i taget. Detta skulle fungera, men i allmänhet brukar sådana lösningar innehålla andra fel så det brukar ofta bli noll poäng på en tenta ändå. Undvik alltså denna teknik!
Ännu enklare, visst är $2<4$? Alltså måste $2\cdot 2 < 2 \cdot 4$, eller $4<8$. Inget konstigt här, det gick bra att multiplicera olikheten med 2. Men vad händer om vi multiplicerar med -2? Då skulle $-2\cdot 2 < -2\cdot 4$, eller $-4 < -8$. Detta stämmer så klart inte!

3 Summor

Vi ska nu diskutera ett bekvämt sätt att skriva summor på, speciellt i de fall då termerna som summeras har någon form av upprepande mönster.

En summa S brukar skrivas

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Symbolen $\sum$ betyder att vi ska summera termerna a_k då **summationsindexet** k startar i $k=1$, sen ökar k ett steg i taget till dess att $k=n$ och vi har då summerat n stycken termer.

Det är inget speciellt att börja med $k=1$, summor kan starta i vilken punkt som helst (det blir olika värden på summan så klart).

Exempel

$$\sum_{k=2}^{4}(k^2+k) = (2^2+2)+(3^2+3)+(4^2+4) = 38.$$

Observera att det inte förekommer något k i svaret! Summationsindexet (bokstaven vi använder för att beskriva hur termerna i summan varierar) försvinner **alltid**. Att vi använde bokstaven k är inte heller något speciellt. Faktiskt så är

$$\sum_{k=2}^{4}(k^2+k) = \sum_{j=2}^{4}(j^2+j).$$

Summor kan delas upp (de är ju summor!) och gemensamma faktorer i alla termer kan brytas ut. Alltså,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

där c är en konstant.
Däremot kan inte summor multipliceras enkelt (eller delas upp om det är en summa av produkter). Vad skulle till exempel gälla

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = ?$$

Antal termer i summan

Hur många termer innehåller summan $\sum_{k=-2}^{5}(2k+1)$? Vi börjar på $k=-2$ och slutar på $k=5$. Alltså kommer k att anta värdena

$$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5,$$

vilket är 8 stycken. Vi kan räkna ut detta genom $5-(-2)+1$. Ofta missar man $+1$, så var försiktiga!

3.1 Aritmetiska summor

Aritmetisk summa

Definition. En summa där det är konstant skillnad mellan påföljande termer kallas *aritmetisk*.

I en aritmetisk summa gäller alltså att

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots$$

är en konstant.

Exempel

Beräkna summan $S = 1+3+5+7+9$.

Detta kan vi direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar en generell teknik. Genom att summera två stycken likadana summor (och skriva det kreativt genom att reversera ordning på den ena) uppstår följande mönster:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 \\ S & = & 9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 \end{array}$$

Vi har alltså visat att $2S = 5 \cdot 10$ eller att $S = 25$. Generellt gäller för en **aritmetisk summa** alltid att

$$S = \frac{\text{första termen} \; + \; \text{sista termen}}{2} \cdot \text{antal termer}.$$

3.2 Geometriska summor

Geometrisk summa

Definition. En summa där det är en konstant kvot mellan påföljande termer kallas *geometrisk*.

Detta innebär alltså att

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

är konstant och att summan nödvändigtvis har formen

$$S = a_1 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \cdots + a_1 q^n$$

om S har $n+1$ termer (notera antalet!).

Exempel

Beräkna summan $S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16$.

Detta kan vi återigen direkt göra i huvudet så klart, men vi illustrerar igen en generell teknik. Om vi multiplicerar summan med kvoten $q = -2$ och drar bort detta från ursprungssumman uppstår följande mönster.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
S & = & 1 & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & & \\
-2S & = & & - & 2 & + & 4 & - & 8 & + & 16 & - & 32 \\
\hline
S-(-2S) & = & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 32
\end{array}$$

Vi har alltså visat att $3S = 33$ eller att $S = 11$. Generellt gäller för en **geometrisk summa** att

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ a(n+1), & q = 1. \end{cases}$$

Observera här att

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

så båda varianterna ger samma svar.

3.3 Andra sorters summor?

Aritmetisk eller geometrisk?

Observera att de allra flesta summor varken är aritmetiska eller geometriska! Det är alltså inte fifty-fifty att chansa på tentan och hoppas på det bästa. Till exempel $\sum_{k=1}^{4} k^2$ är varken eller, men kan enkelt räknas ut ändå eftersom det bara är fyra termer.

Men om en summa innehåller för många termer för att beräknas för hand då? Vissa fall kan man ändå hantera, till exempel följande halvluriga variant (gammal tentauppgift!).

Exempel

Beräkna summan $\sum_{k=3}^{27}(3k+3^k)$.

Lösning. Summan består av en aritmetisk del och en geometrisk del (kontrollera!). Vi delar således upp summan i två delar och beräknar enligt standardformler:

$$\sum_{k=3}^{27}(3k+3^k) = \sum_{k=3}^{27}3k + \sum_{k=3}^{27}3^k = \frac{3\cdot 3+3\cdot 27}{2}(27-3+1)+3^3\sum_{k=0}^{24}3^k$$
$$= 1125+3^3\frac{3^{25}-1}{3-1} = 1125+\frac{27}{2}(3^{25}-1).$$

Svar: $1125+\frac{27}{2}(3^{25}-1)$.