Föreläsning 6: Logaritmer och exponentialfunktioner

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

11 mars 2020

1 Den naturliga logaritmen

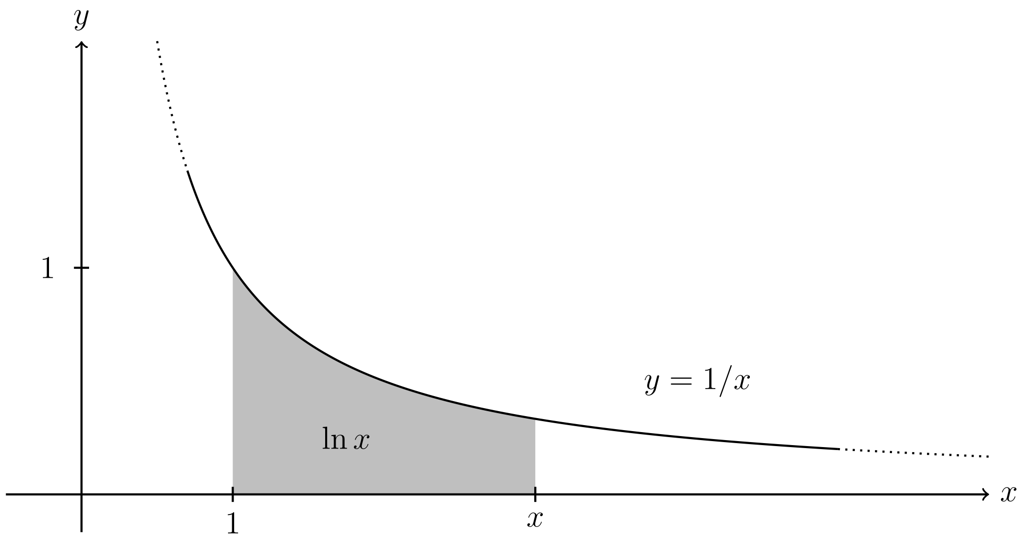
Vi introducerade den naturliga logaritmen tidigare och kommer nu fortsätta att analysera följderna av detta.

1.1 En alternativ definition

Ekvivalent med den definition vi sett tidigare kan man (som i boken) definiera den naturliga logaritmen enligt nedan.

Definition. Den naturliga logaritmen $\ln x$ för $x > 0$ definieras som $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$

Här ser vi att vi använder integralbegreppet utan att direkt ha definierat det innan, så vi har ett liknande problem som med den tidigare definitionen. Vi återkommer till detta i envariabelanalysen när Riemann-integralen behandlas. Förhoppningsvis kommer vi ändå ihåg att man kan tolka en bestämd integral som arean under kurvan. En fördel med denna definition är att det blir lite enklare att få en bild av hur funktionen ser ut.



1.2 Egenskaper för logaritmen

Vi repeterar lite egenskaper för logaritmen.

Egenskaper

Den naturliga logaritmen har bland annat följande egenskaper:

(i) $D_{\ln} =]0, \infty[$ och $V_{\ln} = \mathbf{R}$;

(ii) $\ln xy = \ln x + \ln y$ för $x, y > 0$;

(iii) $\ln x < x - 1$ för $x > 0$ och $x \neq 1$;

(iv) $\ln 1 = 0$;

(v) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$ för $x, y > 0$;

(vi) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ för $x > 0$;

(vii) $\ln x^p = p \ln x$ för $x > 0$ och $p \in \mathbf{Z}$.

Vi har sett hur man tar fram flera av dessa egenskaper enbart genom att använda (ii), vilket var vad vi använde för att definiera logaritmen tidigare. Vi kan även lyfta fram den användbara olikheten vi såg sist.

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1, \quad \text{för } x > 0 \text{ och } x \neq 1.$$

Vi kan även använda denna egenskap för att visa att $\ln x < 0$ då $0 < x < 1$ och $\ln x > 0$ då $x > 1$, även om detta också är tämligen klart från Riemann-integralen.
Övriga samband kan illustreras på liknande sett (övning!)

Exempel

Lös ekvationen $\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2)$ för $x \in \mathbf{R}$.

Lösning. För att alla ingående uttryck ska vara definierade krävs att $x + 1 > 0$, $5 + x > 0$, och $x + 2 > 0$. Från detta ser vi att $x > -1$ krävs för att samtliga uttryck ska vara definierade. Antag att $x > -1$. Då gäller

$$\ln(x+1) = \ln(5+x) - \ln(x+2) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\big((x+1)(x+2)\big) = \ln(5+x),$$

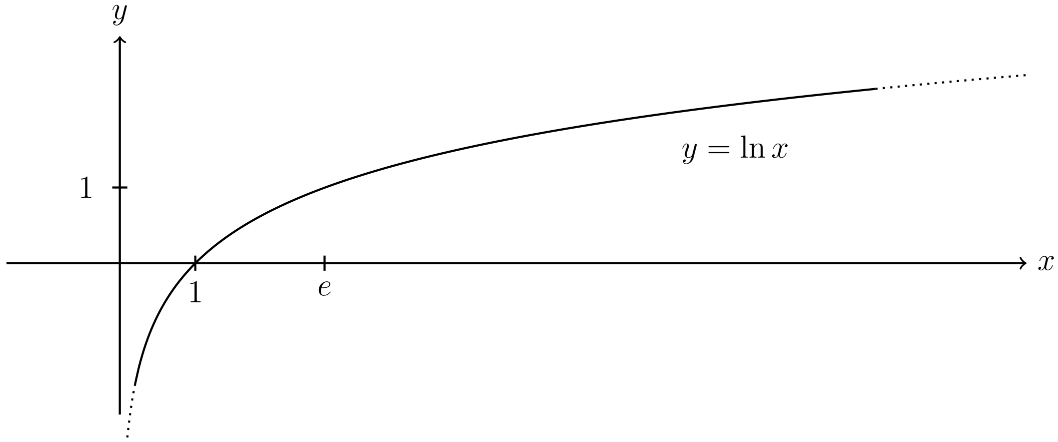
och eftersom ln är strängt växande gäller då att

$$(x+1)(x+2) = 5 + x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+3) = 0.$$

Endast $x = 1$ är en lösning då $x = -3$ ej uppfyller kravet $x > -1$.
Svar: $x = 1$ enda lösningen.

Logaritmer och negativa tal?

Observera att vi endast har definierat $\ln x$ för $x > 0$. Men detta innebär absolut **inte** att $\ln x > 0$ för alla x. Om $0 < x < 1$ så är $\ln x < 0$. Det är skillnad på definitionsmängden och värdemängden!



Observera även att till exempel $\ln(xy)$ kan vara definierad även om $\ln x$ och $\ln y$ inte är det. Det räcker att produkten blir positiv, så exempelvis $x = -2$ och $y = -3$ skulle fungera. Detta kan ställa till det när vi löser ekvationer som innehåller logaritmer, så var försiktiga!

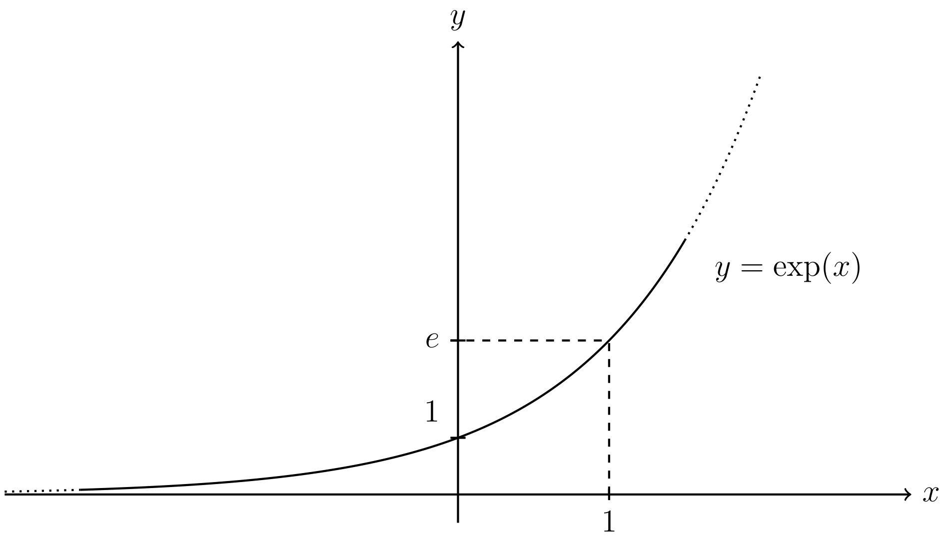
2 Exponentialfunktionen

Eftersom ln är strängt växande finns en invers som vi kallar exp, dvs

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp(y),$$

där $D_{\exp} = \mathbf{R}$ och $V_{\exp} =]0, \infty[$. Som vanligt (med inverser) gäller

$$\ln(\exp x) = x, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{och} \quad \exp(\ln x) = x, \quad x > 0.$$



Om vi jämför graferna för ln och exp så kan man se att $\exp x$ är spegelbilden av $\ln x$ kring linjen $y = x$. Detta gäller generellt för inverser! Så hur hör nu funktionen exp ihop med talet e?

Talet e

Definition. Talet e definieras som $e = \exp(1)$.

Talet e är irrationellt, har närmevärdet $e \approx 2.718$ och uppfyller att $\ln e = 1$.
Om $p \in \mathbf{Z}$ så följer det av logaritmlagarna ovan att

$$\ln e^p = p \ln e = p \qquad \text{eller ekvivalent} \qquad \exp(p) = \exp(\ln e^p) = e^p.$$

Vi väljer därför att skriva $e^x = \exp(x)$. Det är alltså så här vi *definierar* talet e^x genom funktionen exp för alla x.

$\exp(x)$ och e^x

Vi kommer att använda dessa uttryck helt utbytbart, de betyder alltså samma sak. När vi skriver e^x så syftar vi på funktionsvärdet $\exp(x)$. Notationen exp är lämplig ibland, speciellt när det är komplicerade argument. Till exempel kanske vissa tycker

$$\exp\left(1 + \sqrt{x\sqrt{x} - x^3 \sin x}\right)$$

är lättare att läsa än

$$e^{1+\sqrt{x\sqrt{x}-x^3\sin x}}.$$

Egenskaper

Funktionen som definieras av e^x har bland annat följande egenskaper:

(i) $e^0 = 1$ och $e^1 = e$;

(ii) $\ln e^x = x$ för $x \in \mathbf{R}$ och $e^{\ln x} = x$ för $x > 0$;

(iii) $e^{x+y} = e^x e^y$;

(iv) $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$;

(v) $(e^x)^p = e^{px}$ då $p \in \mathbf{Z}$.

Exempel

Lös ekvationen $e^x + 4e^{-x} = 4$.

Lösning. Det följer att

$$e^x + 4e^{-x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 4e^x + 4 = 0.$$

Låt $t = e^x$. Då måste $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$, vilket endast $t = 2$ uppfyller. Alltså är $e^x = 2$, eller ekvivalent, $x = \ln 2$.
Svar: $x = \ln 2$.
Något bökigare? Kanske som handlar om inversen till ett uttryck?

Exempel

Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x) = \ln\left(\sqrt{7} - \ln(1+2x)\right)$.

Lösning. Vi börjar med att bestämma den största möjliga definitionsmängden. Kraven som måste gälla är att $1+2x > 0$ samt $\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0$. Alltså måste $x > -\frac{1}{2}$ och

$$\sqrt{7} - \ln(1+2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{7}} > 1+2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right) > x$$

eftersom ln är strängt växande. Således ges D_f av de $x \in \mathbf{R}$ så att

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right).$$

Låt $y \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \ln(\sqrt{7} - \ln(1+2x)) \quad &\Rightarrow \quad \exp(y) = \sqrt{7} - \ln(1+2x) \\ &\Rightarrow \quad 1+2x = \exp(\sqrt{7} - \exp(y)) \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Eftersom vi bara har ett alternativ ges inversen av

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right).$$

Svar: $D_f = \left\{x \in \mathbf{R} : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{7}} - 1\right)\right\}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2}\left(\exp(\sqrt{7} - \exp(y)) - 1\right)$.
Vad hade hänt om vi fått flera möjligheter i ekvation $(*)$ ovan? Tänk på att vi "bara" räknade med implikationer!

3 Potensfunktioner

Potensfunktioner

Definition. Vi definierar potensfunktionen x^α enligt $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ då $x > 0$ och $\alpha \in \mathbf{R}$, samt $x^\alpha = 0$ då $x = 0$ och $\alpha > 0$.

Detta är en rimlig definition. Till exempel vet vi att

$$x^p = (e^{\ln x})^p = e^{p \ln x}, \quad p \in \mathbf{Z},$$

vilket stämmer överens med definitionen ovan.
Eftersom potensfunktioner är definierade via exp-funktionen så gäller motsvarande regler. Till exempel så är

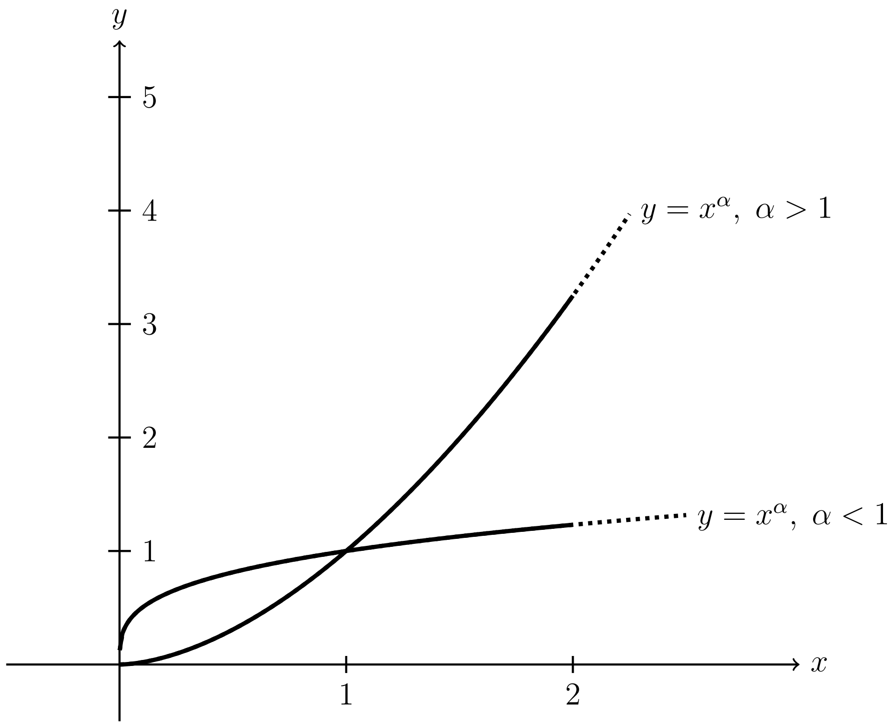
$$x^\alpha x^\beta = \exp(\alpha \ln x)\exp(\beta \ln x) = \exp(\alpha \ln x + \beta \ln x) = \exp((\alpha+\beta)\ln x) = x^{\alpha+\beta}, \quad x > 0.$$

Övriga regler kan visas på liknande sätt. Specifikt kan poängteras att

$$(e^\alpha)^\beta = \exp\left(\beta \ln e^\alpha\right) = \exp(\alpha\beta) = e^{\alpha\beta},$$

så kravet att $\beta \in \mathbf{Z}$ är inte längre nödvändigt med definitionen ovan, utan likheten gäller för alla $\beta \in \mathbf{R}$.

Notera beteendet för x^α för $\alpha > 1$ och $\alpha < 0$.



Exempel

Finn alla reella x så att $4^{x+1} - 2^{x+2} = 2^3$.

Lösning. Vi skriver om ekvationen för att se om vi kan finna en lämplig variabel:

$$4^{x+1} - 2^{x+2} = 4 \cdot 4^x - 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 4t^2 - 4t,$$

där $t = 2^x$. Då är $t > 0$ och ekvationen kan alltså skrivas

$$4t^2 - 4t - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+1)(t-2) = 0.$$

Här ser vi att $t = -1$ inte går (då $2^x = -1$ saknar lösning) och att $t = 2$ medför att $2^x = 2$, så $x = 1$.
Svar: $x = 1$.