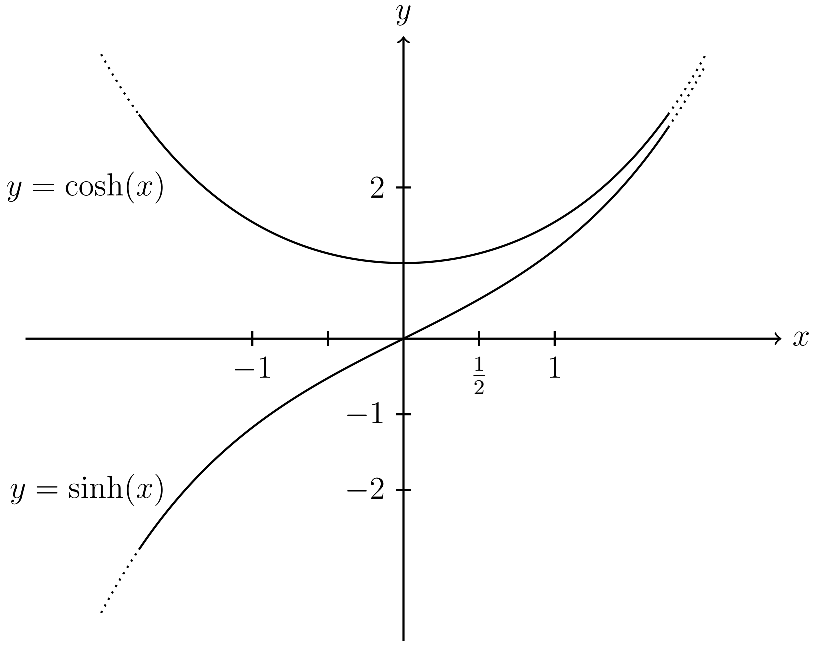
Föreläsning 10: Blandade övningar

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

11 mars 2020

1 cosh (x) och sinh (x)

Definiera funktionerna $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ och $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ för $x \in \mathbf{R}$ (dessa kallas för de hyperboliska cosinus- och sinusfunktionerna).



Notera att *ingen* av dessa kurvor är hyperblar. Dessa objekt dyker upp på grund av följande likhet.

Exempel

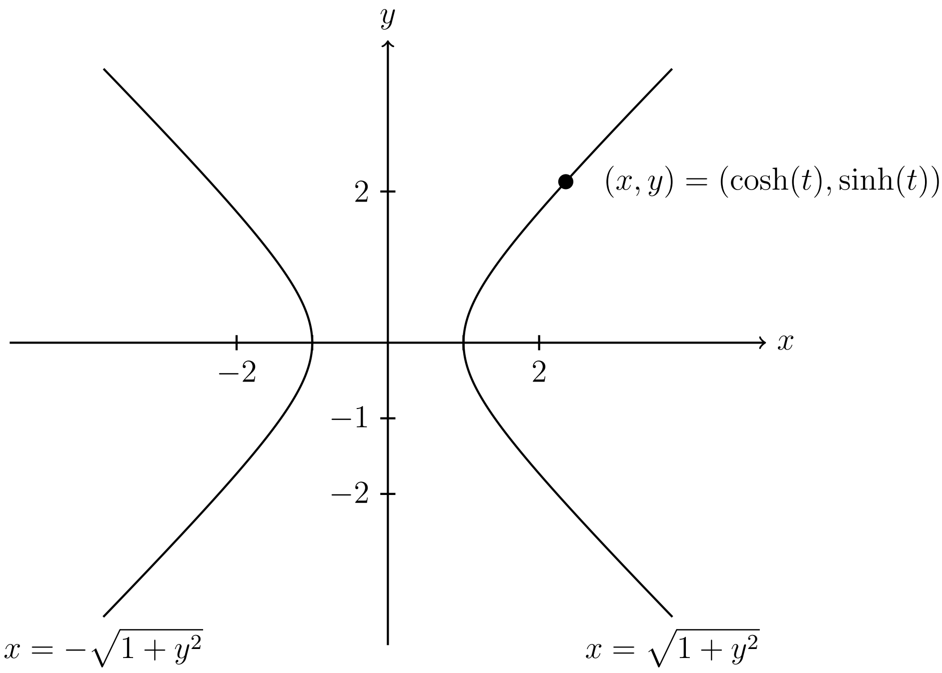
Visa att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ för alla $x \in \mathbf{R}$ (den hyperboliska ettan).

Lösning. Vi förenklar:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = \frac{4}{4} = 1,\end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.

En hyperbel är en kurva som uppfyller en ekvation av typen $x^2 - y^2 = C$ för någon konstant C. Dessa hänger ihop med de hyperboliska funktionerna genom följande manöver. Låt $x = \cosh(t)$ och $y = \sinh(t)$ för $t \in \mathbf{R}$. Då kommer punkten (x, y) i planet att ligga på hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$.



Exempel

Undersök om $\cosh x$ och $\sinh x$ är inverterbara funktioner och ange om möjligt inverserna.

Lösning. Eftersom cosh är en jämn funktion saknar den en invers (med $\mathbf{R}$ som definitionsmängd). Att cosh är jämn kan enkelt ses ur definitionen då

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x.$$

Däremot verkar det möjligt att sinh är inverterbar, så vi försöker därmed att finna ett uttryck för en eventuell invers:

$$\begin{aligned} y = \sinh x \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y = e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (e^x - y)^2 = y^2 + 1. \end{aligned}$$

Det verkar nu finnas två möjligheter: $e^x = y \pm \sqrt{1+y^2}$. Men, eftersom

$$\sqrt{1+y^2} > |y|$$

så blir högerledet negativt om vi väljer minus-lösningen. Detta är omöjligt eftersom vänsterledet alltid är positivt (varför?). Således måste

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Vi har alltså endast ett alternativ, och därmed har vi visat att $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Svar: $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. Funktionen cosh saknar invers.

2 Arcusar!

Exempel

Lös ekvationen $(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Lösning. Låt $x \in [-1, 1]$ och $v = \arcsin x$. Vi visar att $v = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$. Enligt definition vet vi att $\sin v = x$ och $-\pi/2 \le v \le \pi/2$. Vidare,

$$x = \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

och då $0 \le \pi/2 - v \le \pi$ måste $\pi/2 - v = \arccos x$. Med andra ord har vi visat att

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Konjugatregeln medför nu att

$$(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = (\arccos x + \arcsin x)(\arccos x - \arcsin x) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right).$$

Detta uttryck skall vara lika med $-\pi^2/12$, så

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x\right) = -\frac{\pi^2}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Addition av arcus-funktioner: komplex hjälpmetod

Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Låt $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Låt v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln, och v_2 vinkeln z_2 bildar mot positiva real-axeln. Det följer att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2 \qquad \text{och} \qquad \tan v_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

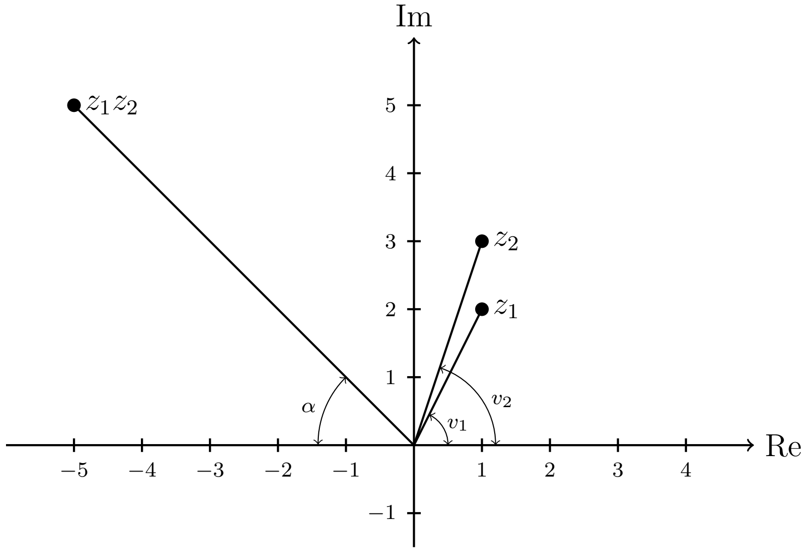
En lösning till respektive ekvation fås genom $v_1 = \arctan 2$ och $v_2 = \arctan 3$. Dessa vinklar ligger i första kvadranten och är de vi söker. Om vi nu skriver z_1 och z_2 på polär form,

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i\arctan 2} \qquad \text{och} \qquad z_2 = \sqrt{10}e^{i\arctan 3},$$

ser vi att $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{i(\arctan 2 + \arctan 3)}$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arctan 3 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \tag{1}$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 + 3i) = -5 + 5i$. Vi har följande illustration:



Vi ser att $\tan\alpha = 5/5 = 1$, så $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$. Alltså blir $v_3 = \pi - \arctan 1 = 3\pi/4$ vinkeln mellan z_1z_2 och (positiva) real-axeln, där $z_1z_2 = \sqrt{50}e^{iv_3}$. Observera att vi inte kan skriva $\arctan(-1)$ eftersom den vinkeln ligger i 4:e kvadranten $(= -\pi/4)$. Detta medför att

$$\arg(z_1z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{2}$$

Ekvationerna (1) och (2) implicerar att

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \tag{3}$$

Heltalet n kommer från $n = k - m$, som kan anta vilket heltal som helst. För att kunna välja det n som är nödvändigt (det finns bara ett korrekt svar) så måste vi uppskatta hur stort talet $\arctan 2 + \arctan 3$ är. Funktionen $\arctan x$ är strängt växande, så

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan alltså se att $\pi/4 + \pi/4 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$, eller

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (3).

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \dfrac{3\pi}{4}$. **OBS: Ett svar!**

4 En trigonometrisk identitet

Exempel

För vilka x gäller att $2(1-\cos x)\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin nx + \sin x - \sin(n+1)x$ för alla positiva heltal n?

Lösning. Vi börjar med att försöka räkna ut summan. Via Eulers formler kan vi skriva

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Im}\, \left(e^{ikx}\right) = \operatorname{Im}\, \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}.$$

Summan vi nu tar imaginärdelen av är en geometrisk summa med kvoten e^{ix}. Vi räknar ut denna:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = -1 + \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = -1 + \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = -1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}},$$

där vi har förlängt med konjugatet. Likheten gäller så länge $e^{ix} \neq 1$. Nämnaren kan skrivas om som $2 - 2\cos x$, och vi erhåller då

$$\operatorname{Im}\, \left(-1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}}\right) = \frac{\sin nx - \sin(n+1)x - \sin x}{2(1 - \cos x)}.$$

Alltså måste

$$2(1 - \cos x) \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin nx - \sin(n+1)x - \sin x$$

såvida inte $e^{ix} = 1$. Men detta händer precis då $x = 2k\pi$ för något $k \in \mathbf{Z}$, och då är $\cos x = 1$ och alla sinus-termer i vänsterledet lika med noll. Likheten gäller alltså även då. Vi har nu visat att likheten gäller för alla $x \in \mathbf{R}$.
Svar: alla $x \in \mathbf{R}$.

5 En invers till!

Exempel

Visa att funktionen $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x}{8}$, $-\pi \leq 9x \leq 2\pi$, har en invers f^{-1} och ange även vad inversen blir.

Lösning. Vi visar att funktionen har en invers genom att bestämma den. Först skriver vi om uttrycket lite för att få något enklare att arbeta med. Som bekant kan summor av sin och cos skrivas om med en fasvinkel om de har samma frekvens. Vi försöker med detta:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x\right) \\
&= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos 3x\right) \\
&= 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Alltså har vi visat att $f(x) = \dfrac{1}{4}\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right)$. Vi försöker nu bestämma inversen:

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Rightarrow \quad 4y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Rightarrow \quad 3x - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \arcsin 4y \text{ eller } \pi - \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi = \arcsin 4y
\end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Nu vet vi att $-\dfrac{\pi}{9} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{9}$ och då måste $x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{1}{3}\arcsin 4y$.

Svar: $f^{-1}(x) = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{1}{3}\arcsin 4x$.

6 Ännu en inversbestämning!

Exempel

Bestäm definitionsmängden och (om möjligt) inversen till $f(x) = \sqrt{4 - \ln\left(\dfrac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right)}$.

Lösning. Vi börjar med att reda ut definitionsmängden. För att logaritmen skall vara definierad krävs

$$\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} > e^{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x > x + 2$$

eftersom logaritmen är strängt växande. Kravet blir alltså att $x > 2$. Vidare måste det som står under kvadratroten vara icke-negativt, så

$$4 - \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln e^4 \geq \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2e^4 \geq e^{2x} - e^{x+2},$$

återigen eftersom logaritmen är strängt växande. Låt $t = e^x$. Vi undersöker när $t^2 - e^2 t - 2e^4 \geq 0$. Vänsterledet är ett andragradsuttryck som vi kan faktorisera:

$$t^2 - e^2 t - 2e^4 = \left(t - \frac{e^2}{2}\right)^2 - \frac{e^4}{4} - 2e^4 = \left(t - \frac{e^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3e^2}{2}\right)^2 = \left(t - 2e^2\right)\left(t + e^2\right).$$

Detta uttryck är icke-negativt endast då $-e^2 \leq t \leq 2e^2$, eller uttryckt i variabeln x, då

$$-e^2 \leq e^x \leq 2e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2 + \ln 2.$$

Definitionsmängden D_f ges alltså av $2 < x \leq 2 + \ln 2$.
Låt nu $x \in D_f$. Vi löser ekvationen $y = f(x)$ med syfte på x:

$$y = \sqrt{4 - \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad 4 - y^2 = \ln\left(\frac{e^{2x} - e^{x+2}}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{4-y^2} = e^{2x} - e^{x+2}.$$

Liksom ovan behöver vi lösa andragradsekvationen:

$$e^{2x} - e^{x+2} = \left(e^x - \frac{e^2}{2}\right)^2 - \frac{e^4}{4} = 2e^{4-y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^x - \frac{e^2}{2}\right)^2 = e^4\left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$e^x = e^2\left(\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2}\right)^{1/2}\right).$$

Eftersom $x \in D_f$ måste $e^2 < e^x \leq 2e^2$, och då $0 < e^{-y^2} \leq 1$ är

$$e^x = e^2\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2}\right)^{1/2}\right) < e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

så ”minusroten” kan inte vara en lösning. Den andra roten fungerar dock utmärkt:

$$e^2 = e^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) < e^x = e^2\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + 2e^{-y^2}\right)^{1/2}\right) < e^2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 2e^2.$$

Varje y-värde ger alltså högst ett x-värde, och därmed existerar inversen eftersom vi precis visat hur man kan räkna ut detta x-värde.

Svar: Definitionsmängd: $2 < x \leq 2 + \ln 2$; $f^{-1}(x) = 2 + \ln\left(\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{4} + 2e^{-y^2}\right)^{1/2}\right)$.

7 Det är roligt med inverser

Exempel

Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för $f^{-1}(x)$ om $f(x) = \dfrac{\pi + 4\arcsin x}{\pi - 4\arcsin x}$.

Lösning. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att $\arcsin x$ ska vara definierad. Vidare får inte

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left[-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right[\cup \left] \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 \right].$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi/4 + \arcsin x}{\pi/4 - \arcsin x} \quad &\Leftrightarrow \quad y\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin x\right) = \frac{\pi}{4} + \arcsin x \\ &\Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ &\Rightarrow \quad x = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1}\right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$. Observera att det **endast är implikation** i sista steget ovan!

Svar: $D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1,\ x \neq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ och $f^{-1}(y) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{y-1}{y+1}\right)$.